IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO SPH PARA MODELAGEM DE ESCOAMENTO DE FLUIDOS - PARTE 1: FORMULAÇÃO E GENERALIDADES DO MÉTODO

Implementation of the SPH method for fluid flow modelling – part 1: mathematical formulation and method generalities

PATINO-NARINO, Edgar Andrés
Universidade Estadual de Campinas

IDAGAWA, Hugo Sakai
Universidade Estadual de Campinas

FERREIRA, Luiz Otávio Saraiva
Universidade Estadual de Campinas

Resumo: Atualmente, tem-se desenvolvido novas implementações numéricas nos métodos de partículas sem malha, destacando-se o método Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), onde se apresentam importantes aplicações em mecânica dos sólidos e fluidos. Este trabalho pretende abranger a implementação do método SPH na simulação de fluido e fluido-estrutura, e de uma maneira geral propor uma metodologia para sua implementação e a sua validação. Portanto, o principal objetivo deste primeiro artigo de uma serie de dois é apresentar o estudo do método SPH na parte de formulação, modelagem fluido-estrutura e condições de contorno. Desse modo, realizou-se a implementação de um simulador para problemas com duas dimensões para exemplos de fluidos confinados e de superfície livre. Resultados promissórios foram atingidos em exemplos comumente referenciados na literatura como "Shear Driven Cavity", "Dam Break", "Dam Collapse" e o problema de Fourier em transferência de calor. Este apresenta aplicações para a solução de um fluido sob uma geometria definida, em condições de temperatura, velocidade e deslocamento variável usando uma formulação acoplada que emprega as equações conservativas de momento, massa e energia. Além disso, realizou-se a comparação com a literatura de problemas experimentais e de outros modelos, apresentando resultados satisfatórios.

Palavras-chaves: Smoothed Particle Hydrodynamics; Método sem Malha; Interação Fluido-Estrutura.

Abstract: Lately new numerical implementations in meshless particle methods are being developed, highlighting the Smoothed Particle Hydrodynamics method (SPH), which have important applications in mechanics of solids and fluids. This paper is intended to address the implementation of the SPH method in fluid and fluid-structure simulations and also propose a general method for its validation. Therefore, the main objective of this first article in a series of two is to present a study on the formulation of the SPH method, on the fluid-structure modeling and on the boundary conditions. Thus, a simulator for two dimensional problems applied in examples of confined fluids and free surface flow was implemented. Promissory results were achieved in examples commonly

referenced in the literature such as the "Shear Driven Cavity", the "Dam Break", the "Dam Collapse" and the Fourier heat transfer problem. This presents applications for the solution of a fluid under a defined geometry, in conditions of temperature, speed and variable displacement using a coupled formulation that employs the conservative equations of time, mass and energy. Comparison with experimental problems provided in the literature and other models were also performed with satisfactory results.

Keywords: Smoothed Particle Hydrodynamics; Meshfree methods; Fluid-structure interaction.

1. Introdução

A simulação computacional tornou-se uma importante ferramenta para solucionar problemas em engenharia e ciências (LIU; LIU, 2003). Testando e examinando fenômenos físicos, proporcionando uma complexidade física significativa, e ajudando na interpretação e até mesmo na descoberta de novos fenômenos.

Apesar de seu êxito, os métodos baseados em malha apresentam dificuldades que limitam sua aplicação em vários tipos de problemas complexos tais como os de superfícies livres, fronteiras deformáveis, interfaces móveis e deformações extremamente grandes. Além disso, existe também a dificuldade em tempo e custo computacional para se construir uma malha de qualidade para casos com geometrias complexas. Portanto, durante os últimos 20 anos, vários novos métodos de simulação sem malha, baseados em partículas, foram objeto de grande atenção (LI; LIU, 2007; LIU, 2009; LIU; GU, 2005), pois fornecem uma nova alternativa. Entre eles estão principalmente os recentes desenvolvimentos no método sem malha de *Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)* (LIU; LIU, 2003), *os Lattice gas methods (LGM)* (FRISCH; HASSLACHER; POMEAU, 1986), *Dissipative Particle Dynamics (DPD)* (HOOGERBRUGGE et al., 2007), *Moving Least Square (MLS)* (LANCASTER; SALKAUSKAS, 1981), *Moving Least Square Reproducing Kernel Interpolant (MLSRK)* (LIU; LI; BELYTSCHKO, 1996; LI; LIU, 2007) e *Discrete Element Method (DEM)* (CUNDALL; STRACK, 1979).

Um método sem malha baseado em partículas, que é bem-sucedido nas simulações de problemas com fluidos, é o (SPH) (MONAGHAN, 2012). Este foi usado em suas origens em problemas de Astrofísica (MONAGHAN;

PRICE; MONAGHAN, 2005), sendo a metodologia básica do método SPH proposta inicialmente por Lucy (LUCY, 1977) e, Gingold e Monaghan em 1982 (GINGOLD; MONAGHAN, 1982). Atualmente, além dos problemas de astrofísica, foi aplicada com êxito em problemas variados de CFD (GOMEZ-GESTEIRA et al., 2010; CRESPO et al., 2011) e mecânica dos sólidos (GRAY; MONAGHAN, 2003; SEO; MIN, 2006). Assim, no SPH o fluido é representado por um grupo de partículas que interagem entre elas. As equações de Navier-Stokes são discretizadas e resolvidas nas posições de tais partículas usando um polinômio de interpolação conhecido como kernel. Além de ser um modelo lagrangeano e não ser preciso definir uma malha entre suas partículas é possível aplicar de maneira natural as condições de fronteira, como superfícies livres (MONAGHAN, 1994), interface entre fluidos (SIGALOTTI; LÓPEZ, 2008) e paredes móveis (MÜLLER et al., 2004).

Portanto, as características que tornam o SPH de interesse em mecânica computacional e vantajoso sobre os métodos tradicionais de malha são (LIU; GU, 2005):

- É mais adequado para solucionar problemas com superfície livres, fronteiras deformáveis, interfaces móveis e altas deformações que os métodos tradicionais de malha.
- Por ser o método de partículas sem malha mais antigo, seu desenvolvimento está mais maduro. Devido ao continuo aprimoramento e desenvolvimento, a precisão, estabilidade e adaptabilidade tem atingido níveis aceitáveis para uso em um grande número de problemas práticos, desde microescala a macro escala, e de sistemas discretos a sistemas contínuos.
- Computacionalmente por ser um método sem malha, o armazenamento das propriedades do modelo é menor. Isto ocorre porque as informações são armazenadas apenas nas posições das partículas em vez de armazenar em cada ponto do espaço como acontece com os métodos com malha. Assim, os cálculos são feitos somente quando são necessários e facilita o uso das técnicas de programação massivamente paralela (CRESPO et al., 2011).

Este trabalho faz parte de uma serie de dois artigos, sendo o primeiro intitulado como *Formulação e generalidades do método* e, a sua continuação, como *implementação de fronteiras móveis e periódicas*. Desse modo, neste trabalho pretende-se explicar as diferentes ferramentas para a formulação e a discretização usando SPH, e sua aplicação para a modelagem de fluido, usando as equações de conservação de Navier-Stokes, para o estudo de variáveis tais como velocidade, temperatura e densidade.

Adicionalmente, são apresentadas, de forma geral, as condições de fronteira de superfície livre e de fluido confinado (MONAGHAN, 1989; GOMEZ-GESTEIRA et al., 2010; CRESPO, 2008), além de aprimoramentos no método como correções para o campo de velocidades e para a densidade. Por conseguinte, explica-se a implementação de um simulador para problemas em duas dimensões para exemplos de fluidos confinados e de superfície livre, como os exemplos de *Shear Driven Cavity*, *Dam Break*, *Dam Collapse*, *Shear Driven Cavity*, *Evolution of a circular parch of fluid* e o problema de *Fourier* em transferência de calor (LIU; LIU, 2003; MONAGHAN; PRICE; MONAGHAN, 2005; MONAGHAN, 1992; LIU, 2009).

2. Implementação do simulador

O método SPH foi desenvolvido originalmente para problemas de hidrodinâmica definidos por *Equações Diferenciais Parciais (EDP)* em uma *formulação forte* para as variáveis como densidade, velocidade e energia (LIU; LIU, 2010). Basicamente têm-se dois passos para a obtenção de uma formulação com SPH. O primeiro é a representação usando uma função ou sua derivada de forma contínua, como a representação de uma integral, chamando esta etapa como *Aproximação de função por Kernel* (LIU; LIU, 2003). Esta aproximação se baseia na avaliação de uma função de peso (ou *função de Kernel*) e suas derivadas como em outros métodos numéricos, sendo mais bem conhecida em SPH como *Função suave do Kernel* (HONGBIN; XIN, 2005). O segundo passo refere-se geralmente como *Aproximação por Partículas*. Neste passo o domínio computacional é discretizado empregando a representação de um conjunto de partículas (nós) distribuídas que representam a configuração do problema (LIU; LIU, 2010; LIU; LIU, 2003). Dessa forma, a discretização das

variáveis na partícula é aproximada pela soma dos valores sobre as partículas vizinhas mais próximas.

2.1. Aproximação de função por Kernel

A aproximação por Kernel consiste de uma função e suas derivadas através de uma função suave (FS) (conhecida também como Kernel, Kernel suavizada ou função de peso (MONAGHAN, 2012; LIU, 2009)). Para a aproximação utiliza-se a identidade da Equação 1, sendo f a função do vetor posição x, Ω o domínio ou volume da integral que contem x, x' a posição vetorial de qualquer outro ponto definido dentro de Ω e $\delta(x-x')$ a função delta de *Dirac* definida na Equação 2.

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}')\delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right)d\mathbf{x}' \tag{1}$$

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \begin{cases} 1 & \mathbf{x}=\mathbf{x}' \\ 0 & \mathbf{x}\neq\mathbf{x}' \end{cases} \tag{2}$$

A Equação 1 indica que uma função pode ser representada de uma forma integral (MONAGHAN; PRICE; MONAGHAN, 2005). Considerando que a função de delta de *Dirac* é usada, a representação da integral da Equação 2 é exata, se e somente se f for definida e contínua em Ω (LIU, 2009).

Porém, o delta de Dirac é uma função generalizada que carece de propriedades de continuidade e diferenciabilidade (LIU; LIU, 2003), e não pode ser empregada para modelos discretizados numericamente (LIU; LIU, 2010). Portanto, para conservar as propriedades desejadas da função de *Dirac*, o $\delta(x-x')$ é substituído por uma *FS* $W(x-x',h)$ dependente da distância entre o elemento localizado em x e qualquer outro elemento localizado em x', imitando as características fundamentais da função delta de *Dirac*. Assim, a Aproximação por Kernel de $f(x)$ se torna a Equação 3.

$$\left\langle f(\mathbf{x})\right\rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}')W\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}',h\right)d\mathbf{x}' \tag{3}$$

Na Equação 3, h é o comprimento suavizado que define a área efetiva da *FS* $W(x-x',h)$, e os colchetes $\left\langle\ \right\rangle$ indicam a *Aproximação por Kernel* (FULK, 1994). Desta forma, embora $W(x-x',h)$ não seja a função de *Dirac*, a

representação da integral em 3, excetuando casos especiais, será uma aproximação (LIU; LIU, 2003; LIU; LIU, 2010).

2.2. Aproximação das derivadas por Kernel

Através do uso da Equação 4, pode-se obter uma aproximação para a divergência da função $f(x)$ inserindo a Equação 3 no operador $\nabla \cdot f(\mathbf{x})$.

$$\left\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}) \right\rangle = \int_{\Omega} \nabla \cdot f(\mathbf{x}') W\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h\right) d\mathbf{x}' \quad (4)$$

Desta forma, a divergência na integral 4 é modificada com respeito ao primeiro termo como na Equação 5.

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x}') W\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h\right) = \nabla \cdot \left(f(\mathbf{x}') W\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h\right)\right) - f(\mathbf{x}') \nabla \cdot W\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h\right) \quad (5)$$

Usando a Equação 5 em 4, obtém-se a Equação 6:

$$\left\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}) \right\rangle = \int_{\Omega} \left[\nabla \cdot \left(f(\mathbf{x}') W\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h\right)\right) - f(\mathbf{x}') \nabla \cdot W\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h\right)\right] d\mathbf{x}' \quad (6)$$

Na primeira integral no lado direito da Equação 6 emprega-se o *Teorema da Divergência* (LIU; LIU, 2003) para transformá-la em uma integral sobre a superfície S do domínio de integração Ω (Equação 7), sendo n o vetor normal unitário sobre S.

$$\left\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}) \right\rangle = \int_{S} f(\mathbf{x}') W\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h\right) \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla \cdot W\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h\right) d\mathbf{x}' \quad (7)$$

A FS definida pela propriedade de *Suporte Compacto* (LIU; LIU, 2003), a integral na superfície de $W(x - x', h)$ na Equação 7 do lado direito deverá tender a zero. Portanto, a *aproximação de Kernel* pode ser formulada como a Equação 8 (VIGNJEVIC et al., 2009).

$$\left\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}) \right\rangle = -\int_{\Omega} f(\mathbf{x}') \nabla \cdot W\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h\right) d\mathbf{x}' \quad (8)$$

2.3. Aproximação por partícula

No método SPH o sistema inteiro é representado por um número finito de partículas que transformam a massa e ocupam um espaço individual (LIU; LIU, 2010). A representação SPH das integrais na aproximação por kernel (nas Equações 3 e 8) torna-se, na forma discreta, em uma somatória sobre todas as partículas no domínio efetivo da partícula *i* e as partículas vizinhas mais próximas *j*. Este domínio que contem as partículas vizinhas de *i* é chamado de

domínio de suporte, como se observa na Figura 1 (LIU; LIU, 2010). Assim, o processo de discretização de somatória de partículas é conhecido comumente na literatura de SPH como *Aproximação por Partículas* (FULK, 1994; LIU; LIU, 2003).

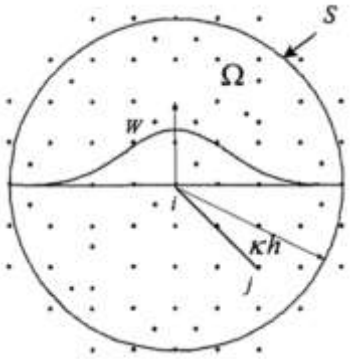


Figura 1: Representação do domínio Ω através de partículas. Observa-se o domínio de suporte da partícula *i* e a FS (W) (LIU; LIU, 2010). Sendo *h* o comprimento suave e κ o fator de extensão da função Kernel.

O volume infinitesimal dx' nas integrais das Equações 3 e 8 é substituído pelo volume finito da partícula j^{th} que é identificado como ΔV_j, este é relacionado com a massa (m_j) conforme a Equação 9.

$$\Delta V_j = \frac{m_j}{\rho_j} \tag{9}$$

Na Equação 9, ρ_j é a densidade da partícula *j* (para *j* = 1, 2, 3, ...N, onde N é igual ao número de partículas dentro do domínio de suporte da partícula *i*).

A Aproximação de Kernel representada na Equação 3 pode ser formulada usando uma discretização por *Aproximação por Partícula* como na Equação 10 (LIU; LIU, 2010).

$$\left\langle f(\mathbf{x}) \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) W\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h\right) \tag{10}$$

Assim, a *Aproximação por Partícula* para uma função na partícula *i* pode finalmente ser formulada segundo a Equação 11:

$$\left\langle f(\mathbf{x}_i) \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) W_{ij} \tag{11}$$

Sendo,

$$W_{ij} = W\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h\right) \tag{12}$$

A Equação 11 indica que o valor de uma função na partícula *i* é a aproximação média dos valores das funções em todas as partículas no domínio de suporte de *i* ponderada pela FS.

Mantendo-se os mesmos princípios para a aproximação da função derivada (Equação 8), é possível obter a discretização apresentada pela Equação 13.

$$\left\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}) \right\rangle = -\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) \cdot \nabla W\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h\right) \tag{13}$$

Sendo o gradiente ∇W da Equação 13 calculado com respeito à partícula *j*. Assim, a *Aproximação por Partícula* para uma função na partícula *i* pode finalmente ser formulada como na Equação 14.

$$\left\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}) \right\rangle = -\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) \cdot \nabla_j W_{ij} \tag{14}$$

Para a Equação 14 o gradiente ∇_j em coordenadas cartesianas é igual ao apresentado pela Equação 15.

$$\nabla_j = \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\| \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \|} \tag{15}$$

A Equação 14 indica que os valores do divergente de uma função na partícula *i* é a aproximação da média dos valores da divergência das funções em todas as partículas no domínio de suporte de *i* ponderada pela FS. Além disso, para a aproximação da derivada de uma função, definida em um sistema cartesiano, pode-se transformar o gradiente na partícula *j* $\left(\nabla_j\right)$ em função do gradiente na partícula *i* $\left(\nabla_j = -\nabla_i\right)$. Assim, a Equação 13 pode ser reescrita em função do gradiente na partícula *j* $\left(\nabla_j\right)$ conforme a Equação 16.

$$\left\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}_i) \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \tag{16}$$

2.4. Algumas técnicas de derivação para a formulação SPH

O método SPH é usado para aproximar a *formulação forte* das EDP, a chave do método SPH está na forma de aproximar as derivadas. Porém, existem diferentes maneiras de aproximar derivadas com a formulação SPH para EDP (LIU; LIU, 2003). Por exemplo, Benz utiliza um enfoque para a aproximação nas derivadas das EDP que multiplica cada termo com a FS e faz a integração do volume com o emprego da integração por partes e a expansão por série de Taylor (BENZ; ASPHAUG, 1995). Por outro lado, Monaghan usa uma abordagem simples aplicando diretamente as equações 11 e 16 (MONAGHAN, 1992), que será o procedimento a ser adotado neste trabalho.

A primeira aproximação do método SPH sem nenhum tratamento especial seria usando diretamente a Equação 16, mas esta aproximação geralmente não é exata e resulta em problemas na conservação do sistema (MONAGHAN, 1992, LI; LIU, 2007). Entretanto, usando esta aproximação (Equação 16) e a identidade do operador divergente, obtém-se a Equação 17.

$$\nabla \cdot f(\mathbf{x})\mathbf{1} = \nabla \cdot \big(f(\mathbf{x})\mathbf{1} \big) - f(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{1}$$

$$\Big\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}_i) \Big\rangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{x}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} - f(\mathbf{x}_i) \cdot \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} \nabla_i W_{ij} \tag{17}$$

Adicionalmente, usando a condição de normalização da FS (MONAGHAN, 1992, LI; LIU, 2007), o lado direito da Equação 17 pode ser considerado nulo, como é apresentado na Equação 18.

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} \nabla_i W_{ij} = \nabla_i \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij} = \nabla_i (\mathbf{1}) = 0 \tag{18}$$

A literatura sugere que a aproximação na Equação 17 apresenta melhores resultados em comparação com a Equação 16 (LIU; LIU, 2010; MONAGHAN, 2012). Portanto, a aproximação por partícula da Equação 17 resulta na Equação 19.

$$\Big\langle \nabla \cdot f(\mathbf{x}_i) \Big\rangle = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j} \Big[f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i) \Big] \cdot \nabla_i W_{ij} \tag{19}$$

Dessa maneira, a melhora na Equação 19, acontece quando alguma partícula está com seu *domínio de suporte* parcialmente cheio de partículas

vizinhas, tornando a parte $-f(\mathbf{x}_i)\cdot\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}\nabla_i W_{ij}$ um complemento para a integração do domínio total da função discreta.

2.5. Equações de conservação para fluidos usando SPH

O método SPH não é somente um sistema de interpolação, mas também proporciona um conjunto de formas de aproximação, por meio de sua discretização, para as equações da mecânica dos meios contínuos (MONAGHAN, 2012). Assume-se para o método SPH que o fluido possui uma baixa compressibilidade ($\nabla\cdot\mathbf{v}\approx 0$), sendo possível obter a solução das equações de *Navier-Stokes* em uma formulação Lagrangeana totalmente explícita, com a ajuda de uma equação de estado para a relação entre pressão e densidade (KHORASANIZADE; SOUSA, 2014; MORRIS; FOX; ZHU, 1997).

2.5.1. Conservação de massa

Para a conservação da massa usa-se a Equação 20, que discretiza o critério da aproximação da Equação 19. Portanto, a densidade é discretizada como a Equação 21.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\left(\nabla\cdot\mathbf{v}\right) \tag{20}$$

$$\left\langle\frac{d\rho_i}{dt}\right\rangle = \rho_i\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{\rho_j}\left(\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_j\right)\cdot\nabla W_{ij} \tag{21}$$

Nas Equações 20 e 21, ρ é a densidade, v o vetor de velocidades (onde se define $\mathbf{v}=d\mathbf{x}/dt$) e t é o tempo. A Equação 21 é sem dúvida a mais usada para a continuidade de massa em problemas de mecânica dos sólidos e fluidos (BENZ; ASPHAUG, 1995; GOMEZ-GESTEIRA et al., 2010).

A variável densidade pode ser discretizada como uma função, a partir da Equação 10, resultando na Equação 22. Esse tipo de discretização para a massa é realizada quando os problemas não apresentam mudanças consideráveis na densidade e o material é considerado quase incompressível (RANDLES; LIBERSKY, 1996; MONAGHAN; PRICE; MONAGHAN, 2005).

$$\left\langle \rho_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} m_j W_{ij} \tag{22}$$

2.5.2. Equação de conservação de momento

A equação de conservação de momento nos meios contínuos é definida pela Equação 23.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\rho}(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + F \tag{23}$$

Assim, para a Equação 23, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões, $\mathbf{F}$ é o campo de forças externas, e $\mathbf{P}$ e μ são a pressão e a viscosidade respectivamente. No entanto, a equação de momento possui várias formas de se discretizar em relação ao termo de viscosidade ($\mu \nabla^2 \mathbf{v}$). A discretização da equação de momento tem sido extensamente estudada especialmente na implementação *Weakly Compressible SPH* (WCSPH) (MIHAI BASA, NATHAN J. QUINLAN, 2008). Portanto, num estudo recentemente realizado por Shahriari (SHAHRIARI; HASSAN; KADEM, 2013), com diferentes abordagens no contexto da formulação de SPH para o momento, mostra que a melhor formulação é a proposta por Morris em (MORRIS; FOX; ZHU, 1997). Com base nisto, considera-se a discretização para a equação de momento como a Equação 24 (XU; STANSBY; LAURENCE, 2009).

$$\left\langle \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} m_j \left\{ \left(\frac{\mathbf{P}_j}{\rho_j^2} + \frac{\mathbf{P}_i}{\rho_i^2} \right) \nabla W_{ij} + \left(\frac{\mu_i + \mu_j}{\rho_i \rho_j} \frac{\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W_{ij}}{r_{ij}^2 + 0,01 h_i^2} \right) \mathbf{v}_{ij} \right\} + \mathbf{F} \tag{24}$$

O tensor $\boldsymbol{\sigma}$ da Equação 23 é composto por um termo de esforço esférico definido pelo gradiente de pressão $\left(-\frac{\nabla P}{\rho} \right)$. Foram utilizadas as equações de estado para fluidos com baixo Reynolds usados por Morris (MORRIS; FOX; ZHU, 1997; LI; LIU, 2002) conforme apresentado na Equação 25 e a equação de Tait (MONAGHAN, 1994) para aplicação de fluido livre conforme a Equação 26.

$$P = c^2 \rho \tag{25}$$

$$P = B_f \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma} - 1 \right] \tag{26}$$

Para as Equações 25 e 26, c é a velocidade do som, $B_f = \frac{c^2 \rho_0}{\gamma}$, γ é uma constante geralmente com valor igual a 7 e ρ_0 é a densidade inicial de referência do fluido.

2.5.3. Equação de conservação de energia

A energia relacionada a cada partícula é calculada a partir da Equação 27. Consegue-se a discretização da energia usando SPH (Equação 28), uma formulação que reúne as discretizações mais usadas nas aplicações em SPH (LI; LIU, 2007; LIU, 2009).

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \mathbf{v} - \dot{Q} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{v} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{v}\right)\right] - \dot{Q} \tag{27}$$

$$\left\langle \frac{dE_i}{dt} \right\rangle = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_j}{\rho_j^2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_i}{\rho_i^2} \right) : \left[\left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i\right) \otimes \nabla W_{ij} + \nabla W_{ij} \otimes \left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i\right) \right] + \dot{Q}_{ij} \tag{28}$$

Para as equações 27 e 28, *E* é a energia, $\dot{Q}$ é o fluxo de calor e o operador ∇^s é o gradiente simétrico, sendo definido como $\nabla^s(\bullet) = \frac{1}{2}\left[(\bullet) \otimes \nabla + \nabla \otimes (\bullet)\right]$.

Para o termo de fluxo de calor entre as partículas, utiliza-se a forma convectiva para a equação de condutividade de calor dada pela Equação 29 (MONAGHAN, 2012). Desta maneira, a discretização que se emprega neste trabalho é a proposta por P.W. Cleary e J.J Monaghan no ano de 1999 (CLEARY; MONAGHAN, 1999), apresentada na Equação 30 (MONAGHAN, 2012; MONAGHAN; PRICE; MONAGHAN, 2005).

$$\dot{Q} = \frac{1}{\rho}\nabla\left(K \nabla T\right) \tag{29}$$

$$\left\langle \dot{Q}_{ij} \right\rangle = \sum_{j=1}^{N} 4 \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} \left(\frac{K_i K_j}{K_i + K_j} \right) \left(\frac{T_i - T_j}{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}} \right) \left(\mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} \right) \tag{30}$$

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \tag{31}$$

Nas Equações 29 e 30, *K* é a condutividade térmica do material, $\mathbf{r}_{ij}$ é o vetor distância entre partículas (Equação 31) e *T* é a temperatura.

2.6. Correções para o método SPH

As correções do método SPH são usadas para melhorar primordialmente erros de aproximação no comportamento da FS (W_{ij}) quando algumas das condições de SPH não são completamente satisfeitas (MONAGHAN; PRICE; MONAGHAN, 2005), principalmente devido à natureza do Kernel (HONGBIN; XIN, 2005), ou quando o domínio de suporte não está completamente cheio de partículas, ou então, quando não se atingem as condições de *Normalização* e de *Domínio compacto* (LIU; GU, 2005).

As correções mais frequentes são as correções no movimento da partícula no tempo (MONAGHAN, 1989), reinicialização da densidade (LIU; GU, 2005; DILTS, 1999) e reinicialização da função gradiente no Kernel (JOHNSON; STRYK; BEISSEL, 1996) e tratamento das tensões desestabilizadoras (GRAY; MONAGHAN, 2003; MONAGHAN, 2000).

2.6.1. Correção de pressão usando Viscosidade Artificial

A correção por viscosidade artificial é usada para compensar as oscilações não físicas nas respostas numéricas da pressão, aprimorando a difusão nos fluidos e a dissipação de energia (LIU; GU, 2005; LIU; LIU, 2010; MONAGHAN, 2000). É muito utilizada por sua facilidade em problemas com fluidos (MONAGHAN; KOS, 2000; LIU; LIU, 2010) e sólidos (RANDLES; LIBERSKY, 1996). Pode-se considerar a primeira aproximação para as tensões desestabilizadoras, mas que é usada para outros fins (MONAGHAN, 2012; JOHNSON, 1996).

2.6.2. Correção do movimento nas partículas

Para a correção do movimento nas partículas usa-se a correção proposta por Monaghan, chamada de XSPH (1989). O XSPH recalcula o campo de velocidade da partícula fazendo uma média entre todas as partículas

vizinhas no domínio de suporte (MONAGHAN; KOS, 2000; LIU; GU, 2005). Assim, para a Equação 32, e é uma constante entre 0,25 e 0,5.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + e\sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{\rho_j}\left(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i\right)W_{ij} \tag{32}$$

A velocidade recalculada $\mathbf{v}$ utilizando XSPH é usada para problemas que apresentam altas velocidades de deformação tanto para fluidos (MONAGHAN; KOS, 1999) como para sólidos (GRAY; MONAGHAN; SWIFT, 2001; BENZ; ASPHAUG, 1995).

2.6.3. Reinicialização da densidade

No método SPH o comportamento da variável densidade apresenta grandes oscilações (LIU; GU, 2005). Portanto, utilizam-se correções para a reinicialização da FS para a densidade (VIGNJEVIC et al., 2009), pois tem uma dupla função como variável de formulação nas EDP de conservação e conforma o material discreto do fenômeno (LIU; GU, 2005; VIGNJEVIC et al., 2009). Para este trabalho se usa o método de Shepard (LI; LIU, 2007; LIU; GU, 2005).

Shepard: O filtro de *Shepard* é uma correção simples do campo de densidades, que é uma reinicialização de grau zero para a FS, sendo aplicado em determinados intervalos de tempo, neste trabalho ele foi utilizado a cada 30 passos (LI; LIU, 2007; LIU; LIU, 2010; LIU; LIU, 2003).

3. Condições iniciais

Para o método SPH algumas condições são muito importantes no início das simulações, como a posição, o comprimento suave inicial (h_i) e a massa.

Para o posicionamento inicial das partículas foi utilizado o software livre de geração de malhas GMSH, onde os nós da malha foram utilizados como as partículas discretas no espaço. Inicialmente, as partículas no domínio são distribuídas de forma quadrada (MONAGHAN; KOS, 2000).

O comprimento suave inicial é obtido da relação da separação inicial entre as partículas (Δx), neste trabalho ele foi definido pela Equação 33

(MONAGHAN, 1989; LIU;LIU, 2003; MONAGHAN; PRICE; MONAGHAN, 2005).

$$h_i = 1,3\,3\,3\Delta x \tag{33}$$

Assim, a massa inicial em cada partícula nos problemas é determinado em função da densidade (i), a separação inicial entre partículas e a dimensão (d), como mostra-se na Equação 34.

$$m_i = \rho_i \left(\Delta x\right)^d \tag{34}$$

4. Condições de fronteira de parede sólida

Para impor as condições de fronteiras neste trabalho realizou-se uma mistura entre os métodos de *partículas Virtuais* (CRESPO, 2008; GOMEZ-GESTEIRA et al., 2010) e de *Repulsão* (MONAGHAN, 2012; LIU; LIU, 2003). O método consiste em colocar na fronteira uma parede de partículas virtuais com as propriedades das duas condições de fronteira, utilizando uma separação entre elas igual à metade da separação entre as partículas reais $\left(\Delta p = \frac{\Delta x}{2}\right)$. Assim, assegura-se um domínio de suporte mais completo e melhores condições quando uma partícula se aproxima e interage com a fronteira.

As Repulsivas na fronteira são usadas para evitar que as partículas reais (partícula do fluido) penetrem a fronteira (LIU; LIU, 2003; MONAGHAN, 2012). Existem maneiras muito reconhecidas de se utilizar este tipo de fronteira, porém é amplamente utilizado o método proposto por Monaghan (MONAGHAN, 2012; MONAGHAN; PRICE; MONAGHAN, 2005), que propõe a função de força $B\left(r_{ij}^T, r_{ij}^N\right)$ como apresentado pela Equação 35.

$$B\left(r_{ij}^N, r_{ij}^T\right) = \Gamma\left(r_{ij}^N\right)\chi\left(r_{ij}^T\right) \tag{35}$$

A componente $\chi\left(r_{ij}^T\right)$ da Equação 35 é definida pela Equação 36, onde Δp é o espaçamento entre as partículas na fronteira e r_{ij}^T é a distância tangencial entra a partícula e a fronteira. Desse modo, este parâmetro garante que as partículas que se deslocam perto da fronteira sejam atingidas por uma

força de repulsão na direção tangencial, evitando assim, a sua penetração (MONAGHAN, 2012).

$$\chi\left(r_{ij}^{T}\right)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{r_{ij}^{T}}{\Delta p}\right) & \text{Se} \quad < \dfrac{r_0}{r_{ij}} < \Delta x \\ \\ 0 & \text{Caso contrário}\end{cases} \tag{36}$$

O parâmetro $\Gamma\left(r_{ij}^{N}\right)$ da Equação 35 é definido pela Equação 37, o qual é baseado no gradiente do kernel da função *B-Spline*, sendo r_{ij}^{N} a distância normal e $q_N=\dfrac{r_{ij}^{N}}{h}$. Assim, Γ é a parte na direção normal da força repulsiva.

$$\Gamma\left(r_{ij}^{N}\right)=\frac{0,02c}{r_{ij}^{N}}\begin{cases}\dfrac{2}{3} & 0\le q_N<\dfrac{2}{3} \\ \\ -2q_N+\dfrac{3}{2}q_N^{2} & \dfrac{2}{3}\le q_N<1 \\ \\ \dfrac{1}{2}\left(2-q_N\right)^{2} & 1\le q_N<2 \\ \\ 0 & 2\le q\end{cases} \tag{37}$$

Este método apresenta problemas ao gerar oscilações nas partículas que ficam perto da fronteira em variáveis como a densidade e a velocidade (FELDMAN; BONET, 2007; GOMEZ-GESTEIRA et al., 2010), mas é muito eficiente para evitar a penetração por parte das partículas reais. Assim, a força *Repulsiva B* é adicionada nas equações de continuidade na força externa (***F***) da Equação 24.

Em contrapartida, as partículas Virtuais são levadas em conta na somatória das partículas reais nas equações de continuidade e de estado, mas suas posições são fixadas ou mudam com relação a imposições externas (CRESPO, 2008; GOMEZ-GESTEIRA et al., 2010). Uma vantagem interessante deste método de fronteira é a sua simplicidade na parte

computacional, pois os cálculos podem ser realizados dentro das iterações do programa para as partículas reais sem a necessidade de criar novas sub-rotinas (CRESPO, 2008; GOMEZ-GESTEIRA et al., 2010; LI; LIU, 2007).

Este método apresenta bons resultados físicos no comportamento da distribuição das variáveis como velocidade e densidade quando estão próximas com a fronteira. Porém, a condição de fronteira de partículas Virtuais apresenta problemas de penetração, geralmente nos problemas com alta velocidade de deformação (CRESPO, 2008; GOMEZ-GESTEIRA et al., 2010). Assim, ao combinar a fronteira de parede rígida de Partículas Virtuais com as partículas Repulsivas obtém-se como resultado uma boa alternativa de complementaridade.

5. Validação do simulador

Esta parte do trabalho foi desenvolvida para a validação do simulador SPH proposto neste trabalho (JOHNSON; STRYK; BEISSEL, 1996). Assim, apresentam-se os resultados de problemas amplamente referenciados em problemas de mecânica de fluidos tais como *Shear Driven Cavity* e Problema de *Fourier* (LIU, 2009; KHORASANIZADE; SOUSA, 2014; LIU; LIU, 2003; XU; STANSBY; LAURENCE, 2009) e *Dam Break*, *Dam Collapse* e *Evolution of a circular parch of fluid* (LIU, 2009; CRESPO et al., 2011; GOMEZ-GESTEIRA et al., 2010).

5.1. Shear Driven Cavity

Para o problema de *Shear Driven Cavity* se empregam os parâmetros que aproximam o comportamento das partículas de um fluido, representado por 1600 partículas em um quadrado de 1x1 mm. Utiliza-se a equação de estado de Morris (Equação 25), as equações de conservação de densidade (Equação 21), de momento (Equação 24) e de energia (Equação 28). As propriedades iniciais do fluido são semelhantes à água são: $\rho_0 = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, $c = 0,01\ \mathrm{m/s}$, $\mu = 0,001\ \mathrm{Pa \cdot s}$, calor específico $C_v = 4181,3 \mathrm{J/kg \cdot ^oC}$ e $K = 0,58 \mathrm{W/m \cdot ^oC}$. Estas propriedades serão mantidas para os demais exemplos, apenas variando no caso c.

O problema *Shear Driven Cavity* foi simulado com base na **Figura 2**a, onde se apresenta o caso de uma velocidade cortante (V_s) constante na fronteira superior igual a 10^{-3} m/s. Pretende-se que o fluido atinja um estado estável no fluxo. Na **Figura 2**b mostra-se o estado estacionário do problema com as linhas de fluxo, onde é possível observar o caminho percorrido das partículas com o passar do tempo, neste caso t=0,21s. É evidente a formação do vórtice gerado pelas condições de fronteira, que coincide com as distribuições de outros modelos realizados com SPH (GOMEZ-GESTEIRA et al., 2010; LIU; LIU, 2003; KHORASANIZADE; SOUSA, 2014; XU; STANSBY; LAURENCE, 2009). Assim, conseguiram-se resultados concordantes com a literatura.

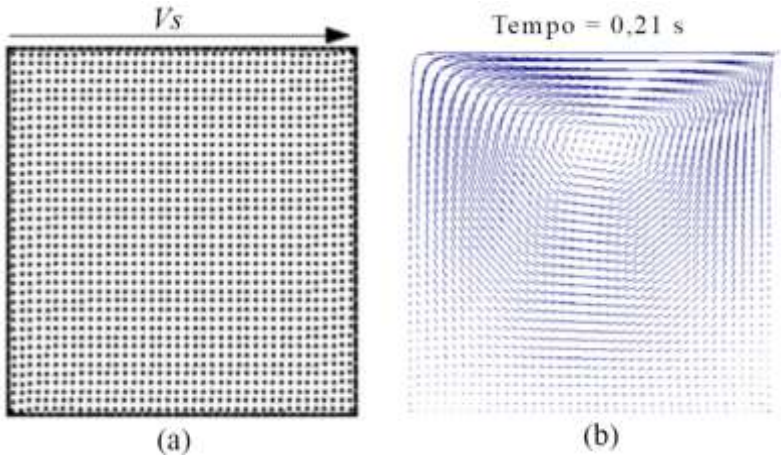


Figura 2: Esquema do problema de Shear Driven Cavity. (a) Condições iniciais com velocidade cortante (V_s) constante na parede superior igual a 10^{-3} m/s; (b) Linhas de fluxo para um tempo igual a 0,21 s.

5.2. Problema de Fourier

Problemas com condução de calor usando uma distribuição de partículas igual ao problema de *Shear Driven Cavity* (Figura 2) onde se realiza a verificação da condução de energia (Equação 29) para o problema de Fourier. Portanto, dois exemplos com condução de calor foram simulados, segundo as condições da Figura 3. A Figura 4 mostra os dois casos para problemas com condução de calor com as condições da Figura 3, onde se pode perceber a evolução no tempo da condução de calor, sendo coerente com o que se espera neste tipo de problema (MONAGHAN, 2012).

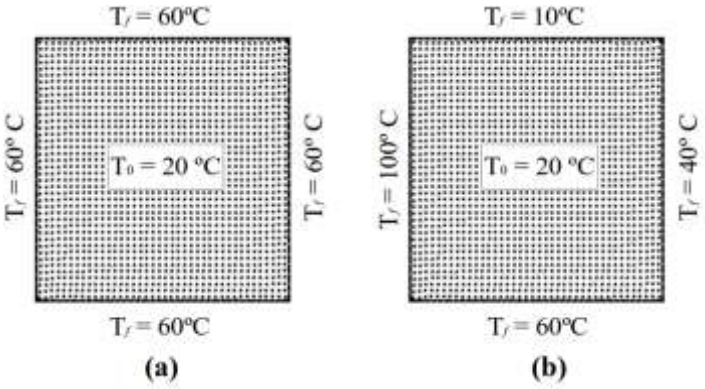


Figura 3: Condições iniciais de temperatura para os problemas com condução de calor. (a) Problema onde as paredes das fronteiras tem uma temperatura constante de 60ºC. (b) Exemplo onde cada fronteira possui uma temperatura diferente.

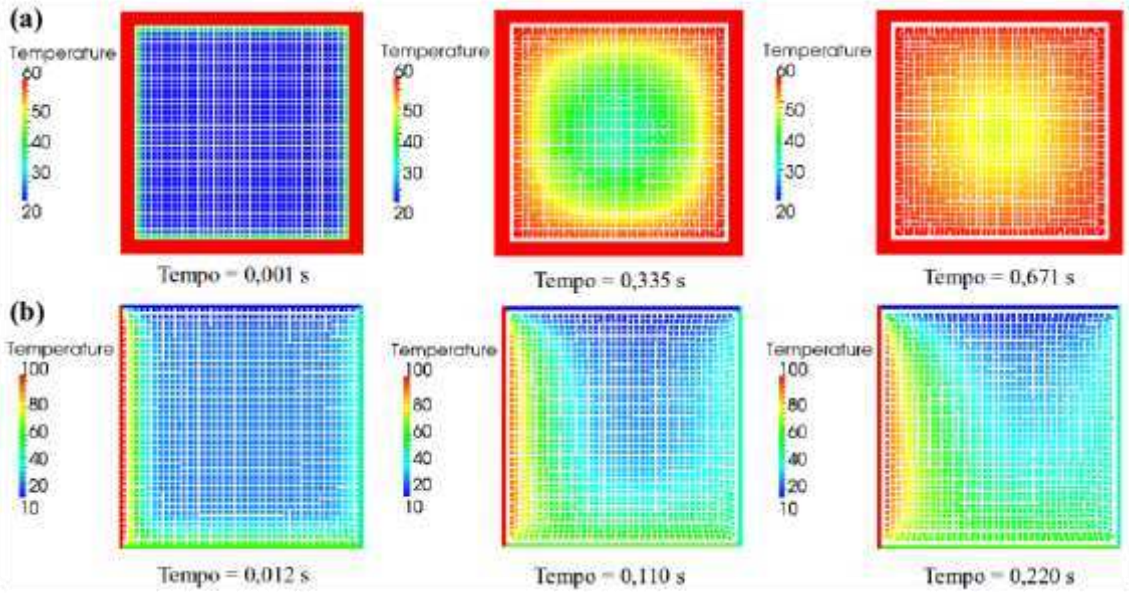


Figura 4: Evolução na temperatura para os problemas com condução de calor.

5.3. Dam Break

Para o problema de Dam Break se emprega as condições iniciais de uma coluna de 1x2 m formada por 1700 partículas com as propriedades da água em um cubo de 4x4 m como na Figura 5. Neste exemplo utilizou-se $c = 22\ \mathrm{m/s}$ e a aceleração da gravidade está na direção negativa de y, com $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$, sendo aplicada de forma constante sobre todas as partículas da coluna de água. Foram utilizadas as equações de continuidade e a equação

de estado de Tait (Equação 26). A densidade inicial do fluido é definida pela Equação 38 para adicionar os efeitos iniciais do fluxo de gravidade ao problema.

$$\rho_i = \rho_0 \left(\frac{g(H - y_i)\gamma}{c^2} \right) \tag{38}$$

Na Equação 38, *H* é a altura máxima da coluna de água (2 m), $\rho_0 = 10^3 \, \mathrm{kg/m^3}$ e y_i é a distância inicial no eixo y da partícula i^{th}.

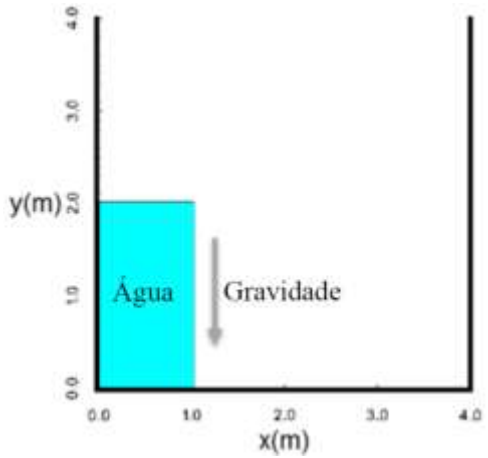


Figura 5: Condições iniciais para o problema de Dam Break.

Na Figura 6 observa-se o valor da velocidade em x das partículas em diferentes instantes de tempo, para um tempo total de simulação igual a 6,2s. Na Figura 7 é apresentada a variável de pressão nas partículas em diferentes instantes de tempo, para o mesmo tempo total de simulação de 6,2s. Pode-se notar que as distribuições das variáveis de velocidade e pressão são similares aos encontrados na bibliografia para esses tipos de problemas de CFD nos instantes iniciais de simulação (MONAGHAN; KOS, 1999; LIU; LIU, 2010; LIU, 2009).

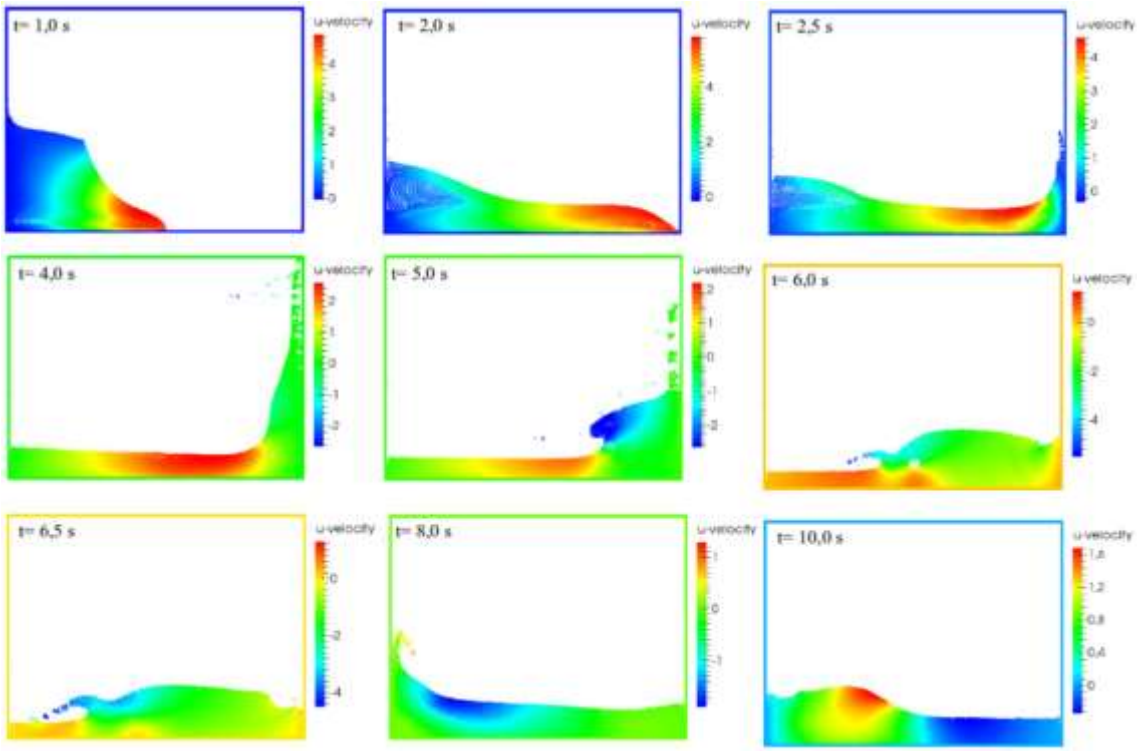


Figura 6: Distribuição da velocidade no eixo x das partículas para o problema de Dam Break.

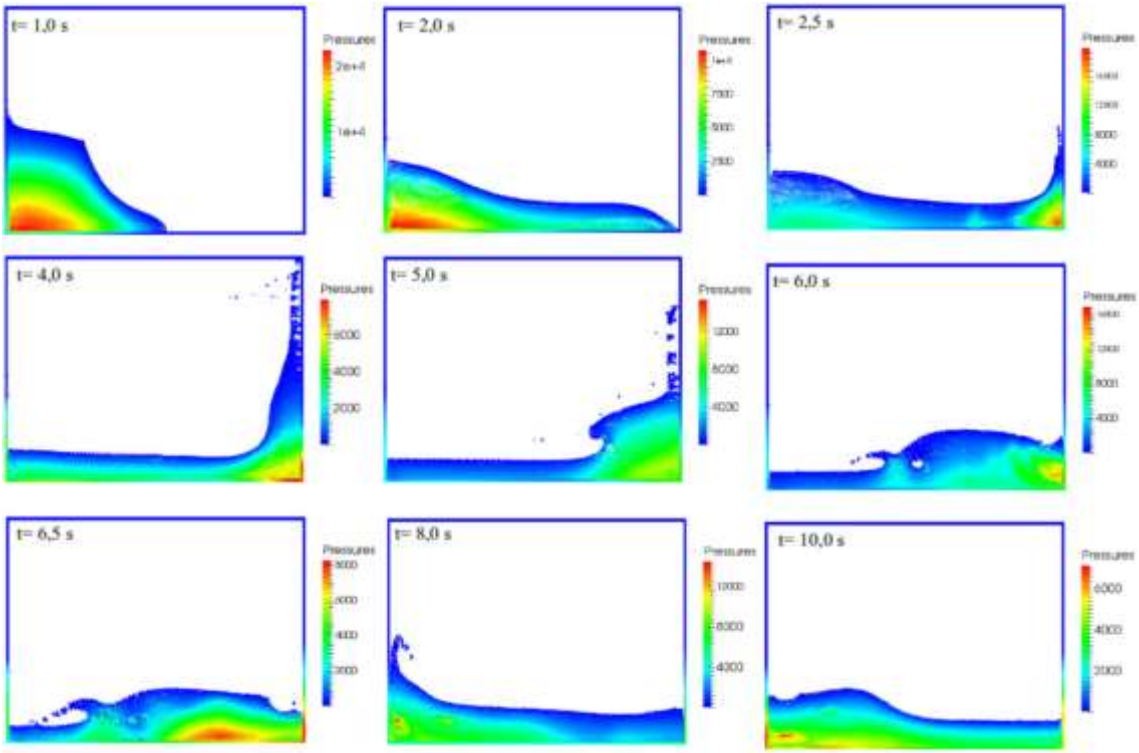


Figura 7: Distribuição de pressão nas partículas para o problema de Dam Break.

5.3.1. Dam Collapse

Problema onde uma coluna de fluido com caraterísticas semelhantes à água e c igual a 45 m/s, começa fluir devido à influência da gravidade. A Figura 8 apresenta a distribuição inicial da simulação. Na Figura 9 observa-se o escoamento do fluido em diferentes instantes de tempo para os campos de pressão e velocidade, sendo semelhantes aos resultados obtidos nos trabalhos de Monaghan (MONAGHAN, 1992) e Liu (LIU; LIU, 2003; LIU, 2009).

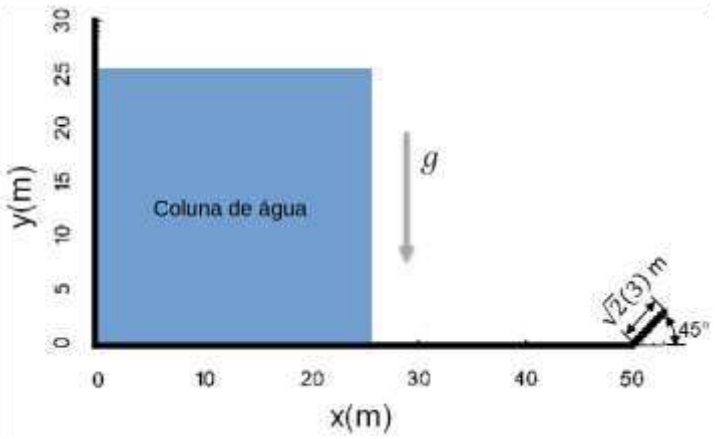


Figura 8: Distribuição inicial para o problema de Dam Collapse.

A Tabela 1 apresenta os resultados tanto de suas simulações como de valores experimentais do trabalho realizado por Monaghan (MONAGHAN, 1992) e também apresentado por Liu em seus livros (LIU; LIU, 2003; LIU, 2009), sendo comparados com os resultados do simulador proposto neste trabalho. Pode-se observar na Tabela 1 a característica geral de valores aproximados no passo de tempo para a largura (H), entre a experimentação (Exp) e as duas simulações. No caso da altura (Z), a simulação proposta neste trabalho, apresenta valores mais próximos aos valores experimentais do que os obtidos na simulação de Monaghan, porém, esses dados não são tão precisos como os da largura.

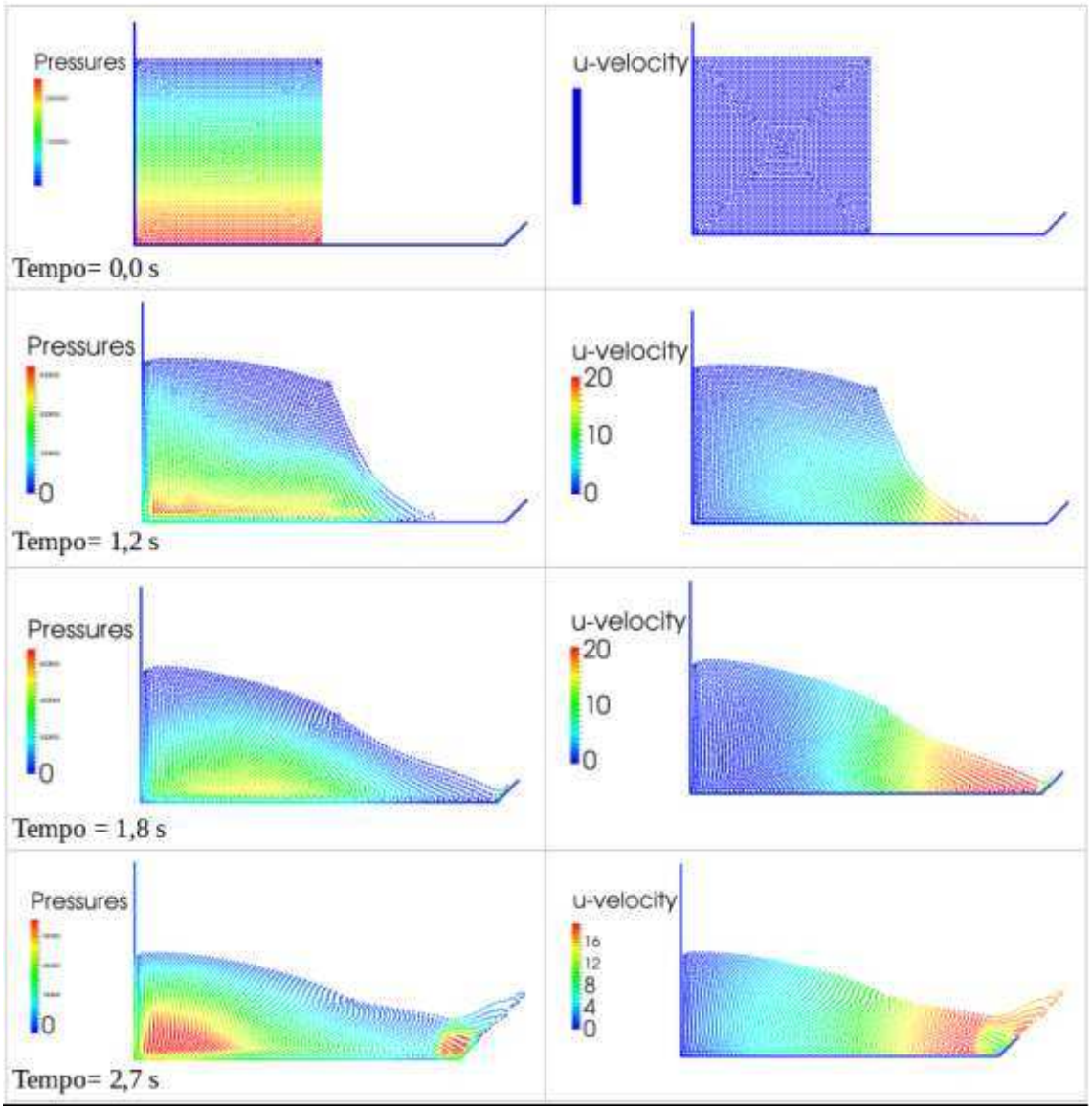


Figura 9: Distribuição do campo de pressão (Pa) nas partículas (coluna da esquerda) e do campo de velocidades em m/s (coluna da direita) para o problema de Dam Collapse.

Tabela 1: Comparação da simulação de Dam Collapse utilizando-se a formulação proposta neste trabalho com valores experimentais (Exp) e com a simulação de Monaghan (MONAGHAN, 1992). Na tabela, H e Z são, respectivamente, a largura e a altura da coluna de água em diferentes intervalos de tempo medidos em metros (m).

Tempo (s)	H (Exp)	H (SPH) Monaghan	H (SPH)	Z (Exp)	Z (SPH) Monaghan	Z (SPH)
0,71	0,90	0,90	0,90	1,33	1,56	1,44
1,39	0,76	0,75	0,76	2,25	2,50	2,18
3,20	0,57	0,56	0,58	3,22	3,75	2,82

5.3.2. Evolution of a circular patch of fluid

A última validação do simulador foi através da implementação do fluxo de Rusanov, onde o exemplo de *Evolution of a circular patch of fluid* foi adotado. Assim, este exemplo foi empregado para comparar a influência das implementações com SPH, WCSPH e Euler. Onde o caso de Euler é a mesma formulação de WCSPH, mas sem empregar a parte viscosa na Equação 24. Nesta simulação, considerou-se um circulo de raio R de fluido, livre de qualquer força externa. Assim, os campos de velocidade e pressão iniciais são prescritos pelas Equações 39.

$$\begin{cases} u_0(x,y) = 10x, \\ v_0(x,y) = -10x, & \forall (x,y), x^2 + y^2 \le R \\ P_0(x,y) = \dfrac{100}{2}\rho_0\left\{R^2 - \left(x^2 + y^2\right)\right\}, \end{cases} \tag{39}$$

Submetido a esse campo inicial de velocidades no eixo x com u_0 e, no eixo y, com v_0, e à pressão P_0, o círculo de água evolui deformando-se no tempo conservando uma forma elíptica, como observado na Figura 10. O fluxo gerado é irrotacional, como consequência da incompressibilidade das formulações, comparando-se com a solução analítica (CHERFILS; PINON; RIVOALEN, 2012; NAIR; TOMAR, 2014; TOUZÉ et al., 2013; MONAGHAN, 1992).

Dessa maneira, na Figura 10 mostra-se a comparação no passo de tempo no campo de pressão nas partículas para cada um dos métodos, e a variação da altura (B) comparada com a solução analítica (MONAGHAN, 1992; CHERFILS; PINON; RIVOALEN, 2012; XU; OUYANG; JIANG; LI, 2014). Pode-se concluir que o campo de pressão nas simulações comporta-se de forma esperada neste tipo de problema (NAIR; TOMAR, 2014; TOUZÉ et al., 2013), em especial no caso de SPH usando a aproximação de Euler.

Em relação à evolução da altura (B), observa-se uma modelagem aproximada para as três simulações, sendo a implementação SPH clássica a mais próxima dos valores analíticos.

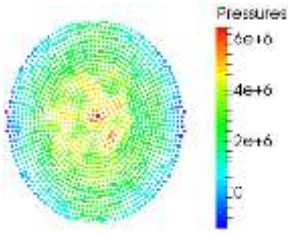
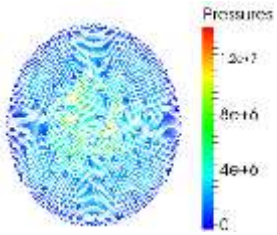
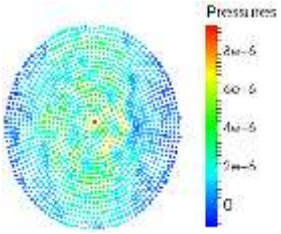
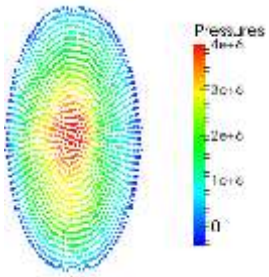
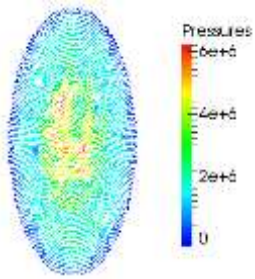
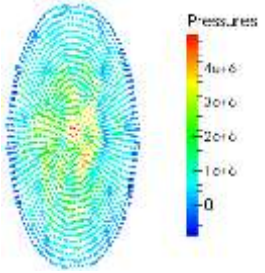
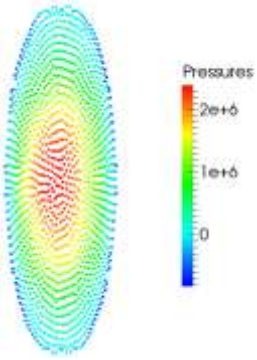
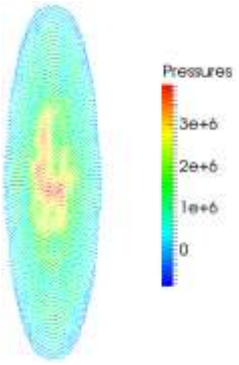
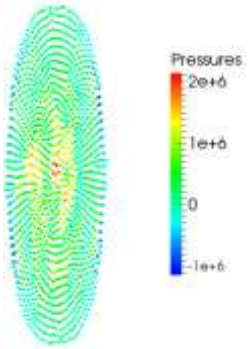
	SPH-Euler	**SPH**	**WCSPH**
Tempo (s) 0,0008 **Teórico** B= 1,086 m	 B=1,080 m	 B=1,085 m	 B=1,080 m
Tempo (s) 0,0038 **Teórico** B= 1,44 m	 B=1,420 m	 B=1,430 m	 B=1,410 m
Tempo (s) 0,0076 **Teórico** B= 1,95 m	 B= 1,870 m	 B=1,910 m	 B=1,810 m

Figura 10: Comparação de três diferentes implementações do SPH (formulação de Euler, SPH clássico e WCSPH) aplicadas ao problema de Evolution of a circular patch of fluid. A Figura compara o valor teórico e o obtido nas simulações para a evolução da altura (B) do fluido.

6. Conclusões

Neste trabalho, foram apresentadas aplicações para a solução de um fluido de geometria definida, em condições de temperatura, velocidade e deslocamento variável usando uma formulação acoplada que emprega as equações conservativas de momento, massa, energia e uma equação constitutiva. Realizou-se a comparação com a literatura de problemas experimentais e de outros modelos, onde bons resultados foram obtidos para os problemas de *Shear Driven Cavity*, Problema de *Fourier*, *Dam Break*, *Dam*

Collapse e *Evolution of a circular parch of fluid*. Portanto, o simulador proposto atingiu resultados promissórios e concordantes com a literatura.

7. Referências Bibliográficas

BENZ, W.; ASPHAUG, E. Simulations of brittle solids using smooth particle hydrodynamics. **Computer Physics Communications**, v. 87, n. 1-2, p. 253–265, maio 1995.

CHERFILS, J. M.; PINON, G.; RIVOALEN, E. JOSEPHINE: A parallel SPH code for free-surface flows. **Computer Physics Communications**, v. 183, n. 7, p. 1468–1480, jul. 2012.

CLEARY, P. W.; MONAGHAN, J. J. Conduction Modelling Using Smoothed Particle Hydrodynamics. **Journal of Computational Physics**, v. 148, n. 1, p. 227–264, jan. 1999.

CRESPO, A. C. et al. GPUs, a new tool of acceleration in CFD: efficiency and reliability on smoothed particle hydrodynamics methods. **PloS one**, v. 6, n. 6, p. e20685, jan. 2011.

CRESPO, A. J. C. **Application of the Smoothed Particle Hydrodynamics model SPHysics to free-surface hydrodynamics**. Universidade de Vigo, 2008.

CUNDALL, P. A.; STRACK, O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies. **Geotechnique**, v. 1, n. 29, p. 47–65, 1979.

DILTS, G. A. Moving-least-squares-particle hydrodynamics I. Consistency and stability. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 44, n. 8, p. 1115–1155, 20 mar. 1999.

FELDMAN, J.; BONET, J. Dynamic refinement and boundary contact forces in SPH with applications in fluid flow problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 72, n. 3, p. 295–324, 15 out. 2007.

FRISCH, U.; HASSLACHER, B.; POMEAU, Y. Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation. **Physical review letters**, v. 423, p. 11–12, 1986.

FULK, D. A. **A numerical analysis of smoothed particle hydrodynamics**. Air University, set. 1994.

GINGOLD, R. .; MONAGHAN, J. J. Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics. **Journal of Computational Physics**, v. 46, n. 3, p. 429–453, jun. 1982.

GOMEZ-GESTEIRA, M. et al. State-of-the-art of classical SPH for free-surface flows. **Journal of Hydraulic Research**, v. 48, n. sup1, p. 6–27, jan. 2010.

GRAY, J.; MONAGHAN, J. Caldera collapse and the generation of waves. **Geochemistry Geophysics Geosystems**, 2003.

GRAY, J. P.; MONAGHAN, J. J.; SWIFT, R. P. SPH elastic dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 49-50, p. 6641–6662, out. 2001.

HONGBIN, J.; XIN, D. On criterions for smoothed particle hydrodynamics kernels in stable field. **Journal of Computational Physics**, v. 202, n. 2, p. 699–709, jan. 2005.

HOOGERBRUGGE, P. et al. Simulating microscopic hydrodynamic phenomena with dissipative particle dynamics. **EPL (Europhysics Letters)**, v. 155, 2007.

JOHNSON, G. R. Artificial viscosity effects for SPH impact computations. **International Journal of Impact Engineering**, v. 18, n. 5, p. 477–488, jul. 1996.

JOHNSON, G. R.; STRYK, R. A.; BEISSEL, S. R. SPH for high velocity impact computations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1-4, p. 347–373, dez. 1996.

KHORASANIZADE, S.; SOUSA, J. M. M. A detailed study of lid-driven cavity flow at moderate Reynolds numbers using Incompressible SPH. n. August, p. 653–668, 2014.

LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. Surfaces generated by moving least squares methods. **Mathematics of computation**, v. 37, n. 155, p. 141–158, 1981.

LI, S.; LIU, W. Meshfree Particle Methods. In: New York: Springer, 2007. p. 25–67.

LI, S.; LIU, W. K. Meshfree and particle methods and their applications. **Applied Mechanics Reviews**, v. 55, n. 1, p. 1, 2002.

LIU, G. **Mesh free methods: moving beyond the finite element method**. Boca Raton: CRC Press, 2009.

LIU, G.; GU, Y. **An introduction to meshfree methods and their programming**, 2005.

LIU, G. R.; LIU, M.B. Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method, **World Scientific Publishing Co.**, Singapore, 2003.

LIU, M. B.; LIU, G. R. Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH): an Overview and Recent Developments. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 17, n. 1, p. 25–76, 13 fev. 2010.

LIU, W.; LI, S.; BELYTSCHKO, T. Moving least-square reproducing kernel method Part II: Fourier analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and engineering**, v. 7825, n. 96, 1996.

LUCY, L. B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. **The Astronomical Journal**, v. 82, p. 1013, 1 dez. 1977.

MIHAI BASA, NATHAN J. QUINLAN, AND M. L. Robustness and accuracy of SPH formulations for viscous flow. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, n. October 2008, p. 601–629, 2008.

MONAGHAN, J. Smoothed Particle Hydrodynamics. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 30, n. 1, p. 543–574, 1 jan. 1992.

MONAGHAN, J. J. On the problem of penetration in particle methods. **Journal of Computational Physics**, v. 82, n. 1, p. 1–15, maio 1989.

MONAGHAN, J. J. Simulating Free Surface Flows with SPH. **Journal of Computational Physics**, v. 110, n. 2, p. 399–406, fev. 1994.

MONAGHAN, J. J. SPH without a Tensile Instability. **Journal of Computational Physics**, v. 159, n. 2, p. 290–311, abr. 2000.

MONAGHAN, J. J. Smoothed Particle Hydrodynamics and Its Diverse Applications. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 44, n. 1, p. 323–346, 21 jan. 2012.

MONAGHAN, J. J.; KOS, A. Solitary Waves on a Cretan Beach. **Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering**, v. 125, n. 3, p. 145–155, 1 maio 1999.

MONAGHAN, J. J.; KOS, A. Scott Russell's wave generator. **Physics of Fluids**, v. 12, n. 3, p. 622, 1 mar. 2000.

MONAGHAN, J. J.; PRICE, D.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics. **Reports on Progress in Physics**, v. 68, n. 8, p. 1703–1759, 1 ago. 2005.

MORRIS, J. P.; FOX, P. J.; ZHU, Y. Modeling Low Reynolds Number Incompressible Flows Using SPH. **Journal of Computational Physics**, v. 136, n. 1, p. 214–226, set. 1997.

MÜLLER, M. et al. Interaction of fluids with deformable solids. **Comput. Animat. Virtual Worlds**, v. 15, n. 34, p. 159–171, 16 jul. 2004.

NAIR, P.; TOMAR, G. An improved free surface modeling for incompressible SPH. **Computers & Fluids**, v. 102, p. 304–314, out. 2014.

RANDLES, P. W.; LIBERSKY, L. D. Smoothed Particle Hydrodynamics: Some recent improvements and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1-4, p. 375–408, dez. 1996.

SEO, S.; MIN, O. Axisymmetric SPH simulation of elasto-plastic contact in the low velocity impact. **Computer Physics Communications**, v. 175, n. 9, p. 583–603, nov. 2006.

SHAHRIARI, S.; HASSAN, I. G.; KADEM, L. Modeling unsteady flow characteristics using smoothed particle hydrodynamics. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, n. 3, p. 1431–1450, fev. 2013.

SIGALOTTI, L. D. G.; LÓPEZ, H. Adaptive kernel estimation and SPH tensile instability. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 55, n. 1, p. 23–50, jan. 2008.

TOUZÉ, D. LE et al. A critical investigation of smoothed particle hydrodynamics applied to problems with free-surfaces. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, n. 23 June, p. 660–691, 2013.

VIGNJEVIC, R. et al. Derivation of SPH equations in a moving referential coordinate system. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 30-32, p. 2403–2411, 1 jun. 2009.

XU, R.; STANSBY, P.; LAURENCE, D. Accuracy and stability in incompressible SPH (ISPH) based on the projection method and a new approach. **Journal of Computational Physics**, v. 228, n. 18, p. 6703–6725, out. 2009.

XU, X.; OUYANG, J.; JIANG, T.; LI, Q. Numerical analysis of the impact of two droplets with a liquid film using an incompressible SPH method. **Journal of Engineering Mathematics**, v. 85, n. 1, p. 35-53, 2014.