UTILIZAÇÃO DE RECURSOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA EM ENGENHARIA, APLICADA AO ESTUDO ESTRUTURAL DE OSSOS

Utilization of mathematic resources modeling in engineering, applied to structural bones study

Márcio da Silva MOURA
Universidade Estadual de Campinas

Renato PAVANELLO
Universidade Estadual de Campinas

Resumo: Os métodos computacionais aliados às leis constitutivas e teorias de modelagem matemática do comportamento físico da matéria são importantes instrumentos para representação do comportamento mecânico de domínios multi-físicos sujeitos a carregamentos diversos. A representação dos materiais biológicos também não é diferente, mas neste caso, existem fatores ligados ao comportamento celular vivo. Assim fora estudado, através do método dos elementos finitos, os esforços que a região da cabeça de um fêmur apresenta devido às forças provenientes do caminhar de um homem de 70 kg. O modelo foi baseado nas teorias da poroelasticidade acoplada de Biot. Esse estudo, por ter sido realizado apenas no sistema plano, serve como indicação da potencialidade do uso do modelo poroelástico, todavia, futuros estudos em três dimensões poderão apresentar melhores indicadores.
Palavras-chave: Poroelasticidade; Método dos Elementos Finitos; Bioengenharia.

Abstract: The computation methods join to constitutive low and mathematic modeling theory of physic behaviour of materia are important for mechanic behaviour representation of multi-physics domain subordinate to several loads. The biologic materials representation is not also different, but in this case, there are factors join to live cellular behaviour. Thus were studied, through finite element method, the strength that head femur region show according to loads coming from human walk of 70 kg. The model was based by Biot poroelasticity theory. That estudy, to have been realized only on plane system, attend on indication of the potenciability use of poroelastic model, however, future studies on three dimensions will make show better results.
Key-words: Poroelasticity; Finite element method; Bioengineering

INTRODUÇÃO

A poroelasticidade é uma teoria desenvolvida para o estudo do comportamento de uma estrutura composta por duas fases, uma elástica e outra fluídica. Esse modelo representa a interação entre a deformação e o fluxo de fluido em um meio poroso. O

precursor destes estudos foi Biot (1935). Com o avanço tecnológico o modelo matemático dessa teoria pode ser cada vez mais utilizado em sistemas de geometria complexa (Rybicki et al., 1972). Neste sentido, este trabalho tem o intuito de apresentar uma comparação do comportamento dos ossos longos através da teoria da poroelasticidade acoplada com a teoria da elasticidade pura (Doblaré et al., 2002), através do método dos elementos finitos (Taylor, 2005), considerando o osso, na poroelasticidade um material poroso que contém interação entre uma porção sólida (cálcio) e fluída (sangue e fluído ósseo) (Cowin, 2004). O elemento poroso representa o acoplamento sólido-fluído. Suas respostas de deslocamento e pressão proporcionam indicar quais as regiões apresentam mais sensibilidade aos carregamentos, contribuindo assim, para o projeto de próteses e implantes, predição de falhas ósseas e intensidade de carregamento indicado para determinada morfologia. Tendo o osso geometria complexa, esta análise levou em conta as diferentes porosidades presentes no osso cortical e trabecular e a distribuição do fluido para um caso bidimensional. Fora realizada uma modelagem computacional do comportamento de uma parte de um fêmur submetido a carregamentos de uma pessoa caminhando, de forma a realizar as comparações necessárias.

FORMULAÇÃO NUMÉRICA

O modelo mecânico poroelástico deriva-se das equações fundamentais da elasticidade sujeito a uma pressão fluída, acoplada as equações do sistema fluído. Aplicando-se ao caso plano, tem-se:

$$
\begin{aligned}
&G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\upsilon}\frac{\partial e}{\partial x} - \alpha\nabla p = 0 \\
&G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\upsilon}\frac{\partial e}{\partial y} - \alpha\nabla p = 0 \\
&\kappa\nabla^2 p - \alpha\frac{\partial e}{\partial t} - \frac{1}{Q}\frac{\partial p}{\partial t} = 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal, ν o coeficiente de Poisson drenado, α o coeficiente de Biot, p a pressão nos poros, Q a constante poroelástica de proporcionalidade, κ o coeficiente de permeabilidade do fluído, ∇ o operador nabla de

derivação, *e* a variação volumétrica e *u* e *v* os deslocamentos nas direções de *x* e *y*, respectivamente.

Reescrevendo a equação (1) em termos das tensões e pressão e aplicando a conservação do momento e massa na equação (1) tem-se:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \\ &\kappa \nabla^2 p - \alpha \frac{\partial e}{\partial t} - \frac{1}{Q}\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Sendo as tensões da forma:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\upsilon e}{1-2\upsilon}\right) - \alpha p \\ \sigma_y &= 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\upsilon e}{1-2\upsilon}\right) - \alpha p \end{aligned} \tag{3}$$

Aplicando o método dos resíduos ponderados em (2) pode-se obter as seguintes equações:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y}\right) W d\Omega = 0 \\ &\int_\Omega \left(\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right) W d\Omega = 0 \\ &\int_\Omega \left(-\kappa \nabla^2 p + \alpha \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{Q}\frac{\partial p}{\partial t}\right) W d\Omega = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

sendo *W* a função peso e Ω o domínio do problema poroelástico.

Separando-se os termos da direção *x, y* e a componente de pressão têm-se as equações para cada um desses termos. Aplicando-se o método de resolução de

Galerkin e discretizando os termos derivados no tempo, por diferenças finitas e no espaço por elementos finitos, chega-se a seguinte expressão matricial:

$$\begin{bmatrix} [K] & -[Q] \\ 0 & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ p_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [Q_n]^T & [G] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} \\ \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ q \end{Bmatrix} \tag{5}$$

sendo [*K*] a matriz de rigidez elástica, [*H*] a matriz de rigidez do fluído, [Q_n] a matriz de acoplamento, [*G*] a matriz de amortecimento do fluído, {*f*} vetor de cargas da parte elástica e {*q*} vetor dos fluxos (Moura, 2007).

As matrizes acopladas da equação (5) podem ser resolvidas diretamente por sistemas de solução não simétrica, mas neste trabalho foi utilizada a solução particionada que desacopla as matrizes de (5) e soluciona sistemas com matrizes simétricas, conforme equação seguinte.

$$\begin{aligned} [K]\{u_i\} &= \{f\} + [Q_n]\{p_i\} \\ [K_p]\{p_i\} &= [Q_n]^T \{\Delta u\} + [G]\{p_{i-1}\} + \{\Delta t q\} \end{aligned} \tag{6}$$

O elemento implementado para este trabalho foi o isoparamétrico quadrilateral linear para o sistema quase-estático (transiente).

O *solver* utilizado para o processamento do modelo poroelástico foi o MAFLAB, programa produzido em linguagem FORTRAN, pelo grupo de pesquisa em Fluído-Estrutura da Faculdade de Engenharia Mecânica da Unicamp (Moura et al, 2007).

RESULTADOS

Os carregamentos aplicados à cabeça do fêmur foram obtidas de Bertolo (2002). Neste caso, apresentado na Figura 1, para um homem de pé com 75 kg, andando, sem carregar nenhum peso, essas forças são de 703 N e 2317 N, respectivamente indicadas por F e f_c (Beaupré et al., 1990). Na base dos modelos foram consideradas restrições na direções vertical e algumas na horizontal e condições de contorno de

pressão prescrita de 6600 Pa. Este valor de pressão é referente a pressão sanguínea observada na micro-camada óssea (Cowin, 2001; Qin et al., 2003).

Foram consideradas as seguintes propriedades para a representação das diferentes regiões do fêmur: - A região cortical tem módulo de elasticidade de 20 GPa e Poisson de 0,325 e; - a região trabecular 18 GPa e Poisson de 0,242, conforme apresentado na Figura 2, onde mat 1 é a região cortical e a mat 2 a região trabecular. A malha foi construída utilizando o pré-processador GID.

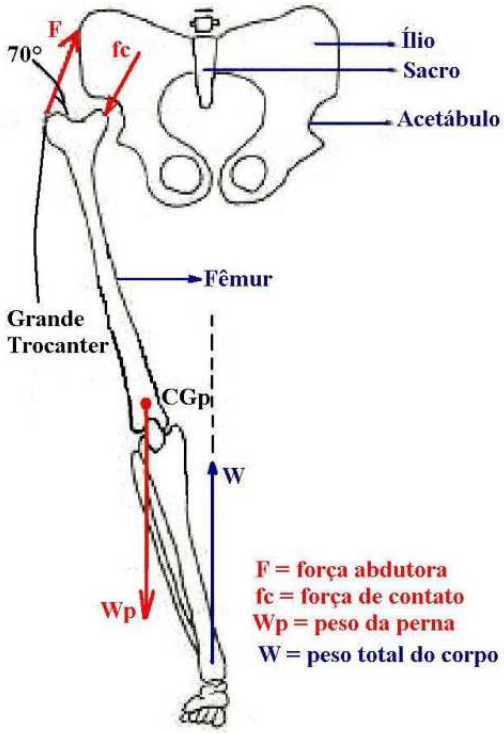

Figura 1. Condições de contorno sobre os ossos inferiores (Bertolo, 2002).

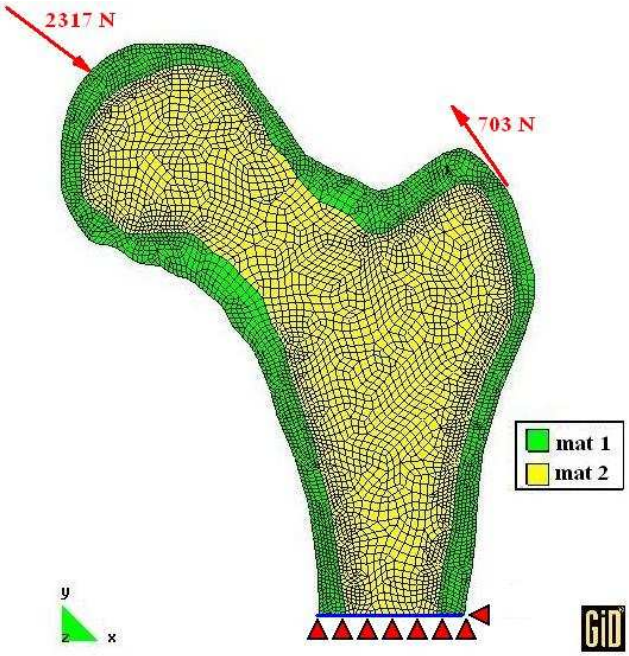

Figura 2. Malha de elementos finitos e carregamentos.

Os deslocamentos aparecem de forma uniforme, o que demonstra coerência dos resultados, visto que independente das deferentes regiões, o modelo deve conter o mesmo deslocamento em todo o seu perfil, Figura 3. Pode ser que este modelo seja mais rígido que os modelos analisados com a teoria da elasticidade pura, isto decorre da ação de resposta do fluido ao carregamento.

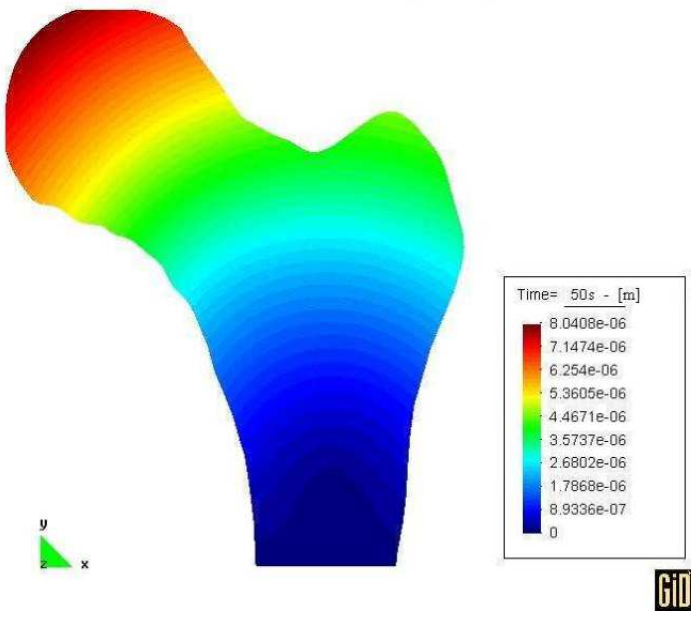

Figura 3. Deslocamentos provenientes do carregamento.

O efeito do fluido tende a acomodar melhor os carregamentos, fazendo com que as tensões para o modelo poroelástico possam ser menores que as do modelo elástico.

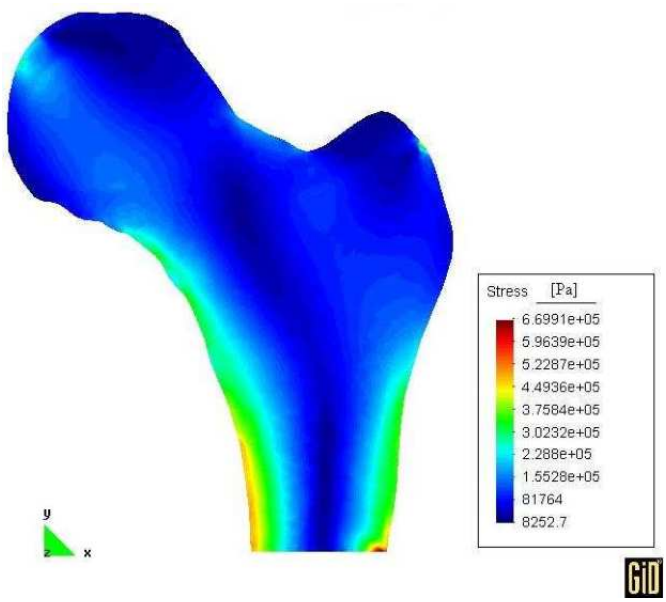

Figura 4. Tensões para o modelo poroelástico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo poroelástico tende acomodar melhor os carregamentos sobre o fêmur. Testes experimentais devem ser realizados para comprovação disso, pois se no modelo vivo isso realmente ocorrer, o estudo para o projeto de próteses e componentes de reabilitação devem levar isso em consideração. Estas análises servem como base para estudos atuais sobre o modelo ósseo tridimensional e a modelagem desses com implantes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEAUPRÉ, G. S.; Orr, T. E.; and CARTER, D. R., **An approach for time-dependent bone modeling and remodeling-application: a preliminary remodeling simulation**, Journal Orthopaedic, vol. 8, p. 662–670, 1990.

BERTOLO, L. A., **Biofísica para Fisioterapia**. Apostila didática - FAFICA, Caruaru, 2002.

BIOT, M. A., **Le problème de la consolidation des matières argileuses sous une charge**. Annales de la Societé Scientifique de Bruxelles, B55, p. 110-113, 1935.

COWIN, S. C., **Bone poroelasticity**. Bone Mechanics Handbook. CRC Press LLC, Boca Raton, CA, 2001.

COWIN, S. C., **Anisotropic poroelasticity: fabric tensor formulation**. Mechanics of Materials, vol. 36, p. 665–677, 2004.

DOBLARÉ, M., GARCÍA, J. M., and CEGOÑINO, J., Development of an internal bone remodelling theory and applications to some problems in **orthopaedic biomechanics, Meccanica**, vol. 37, p. 365–374, 2002.

MOURA, M. S., **Elaboração de uma ferramenta computacional para modelamento de próteses e ossos através da poroelasticidade acoplada**, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. Dissertação de Mestrado, 2007.

MOURA, M. S., PAVANELLO, R., DUTRA, D. L., **Comparison between numeric solutions of direct method and staggered method applied to analyze poroelastic of bones**, 19th International Congress of Mechanical Engineering, Proceedings of COBEM 2007, p. 10, 2007.

RYBICKI, E. F., SIMONEN, F. A., and WEIS, E. B., **On the mathematical analysis of stress in the human femur**. Journal of Biomechanics, vol. 5, pp. 203–215, 1972.

Taylor, M. E., **Finite element analysis oh the resurfaced femoral head**. Journal of Engineering in Medicine, vol. 220, p. 289–297, 2005.

QIN, Y. X.; KAPLAN, T.; SALDANHA, A.; RUBIN, C., **Fluid pressure gradients, arising from oscillations in intramedullary pressure, is correlated with the formation of bone and inhibition of intracortical porosity**. Journal of Biomechanics, vol. 36, p. 1427–1437, 2003.