PROPOSTA DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA INTERDISCIPLINAR NO ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: CASO DO PÊNDULO SIMPLES

Proposal Of An Interdisciplinary Didactic Sequence In The Teaching Of Differential Equations: Case Of The Simple Pendulum

SANTOS, Antônio Vanderlei
Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai

HECK, Miriam Ferrazza
Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai

KRAUSE, João Carlos
Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai

FRANZIN, Rozelaine Fátima
Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai

WEYH, Cênio Back
Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai

RESUMO: Apresenta-se neste artigo, um estudo interdisciplinar de ensino de Física e Matemática, utilizando os conceitos de equação diferencial sobre o pêndulo simples, por meio de uma proposta de sequência didática. Cabe enfatizar que, não basta demonstrar as equações de regem um fenômeno físico para que a aprendizagem seja considerada significativa, mas também faz-se necessário associar um fenômeno experimental. Neste sentido, parte-se do pressuposto de que os acadêmicos dos cursos que envolvam esses conceitos se encontram imersos na fase do estágio formal operacional, visto que, conseguem ir além das experiências concretas e por isso pode-se observar o início da formalização do pensamento abstrato. Nesse sentido, acredita-se que a proposição de práticas e estudos em laboratórios possuem potencial significativo para o desenvolvimento de conceitos, de forma a contribuir com a modelagem do sistema, assim como, ampliar a possibilidade de compreensão do fenômeno estudado de forma interdisciplinar.

Palavras-Chave: Interdisciplinaridade; Laboratório de Física; Equações Diferenciais; Aprendizagem Significativa; Sequência Didática.

ABSTRACT: This article presents an interdisciplinary study of physics and mathematics teaching, using the concepts of differential equation on the simple pendulum, through a proposal of didactic sequence. It should be emphasized that it is not enough to show the equations of governing a physical phenomenon so that learning is considered significant, but it is also necessary to associate an experimental phenomenon. In this sense, it is assumed that the students of the courses that involve these concepts are immersed in the phase of the formal operational stage, since they can go beyond concrete experiences and therefore one can observe the beginning of the formalization of abstract thought. In this sense, it is believed that the proposition of practices and studies in laboratories have significant potential for the development of concepts, and may contribute to

the modeling of the system, as well as, it expands the possibility of understanding the phenomenon studied in an interdisciplinary way.

Keywords: Interdisciplinary; physics lab; differential equations; significant learning; didactic sequence.

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, vem sendo destaque no ensino a utilização de tecnologias, como uma avalanche, quase uma obrigatoriedade de ser discutida e utilizadas em sala de aula, tanto no Ensino Fundamental como nos demais níveis de ensino. Neste trabalho, buscou-se refletir sobre uma outra questão mais primária, que é o ensino utilizando a interdisciplinaridade no Ensino Superior nas ditas Ciências Exatas, como, por exemplo, nos cursos de Física, Engenharias, Química e Matemática. Nesses cursos, geralmente o aluno é por vezes, submetido a processos mecânicos de repetição de cálculos e demonstrações, muito extensas sem, muitas vezes, preocupar-se com os conceitos físicos e matemáticos utilizados e muito menos com os conceitos experimentais. Desta forma, não consegue se apropriar de uma aprendizagem significativa e muito menos a utilização desses conceitos na sua carreira de engenharia ou noutras carreiras que utilizam ferramental matemático e físico.

De acordo com Madruga (1996), a aprendizagem significativa distingue-se das demais porque, o seu conteúdo pode ser relacionado com o conhecimento prévio do aluno e este pode atribuir significado próprio aos conteúdos que assimila. Seguindo esta perspectiva, a tarefa do docente consiste em programar, organizar e sequenciar os conteúdos de forma que o aluno possa realizar tal aprendizagem.

Segundo Moreira (2012, p. 2), a aprendizagem significativa pode ser caracterizada como sendo aquela

> *Em que as ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não liberal, não ao pé-da-letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende.* (Moreira, 2012, p. 2).

Nesse contexto, cabe ressaltar as concepções de Santos (2017, p. 2-3) que afirma que a concretização da aprendizagem significativa necessita ser

compreendida por meio dos sete passos da construção ou da reconstrução do conhecimento, os quais são:

1. O sentir- toda aprendizagem parte de um significado contextual e emocional;

2. O perceber- após contextualizar, o educando precisa perceber as características específicas do que está sendo estudado;

3. O compreender- é o que dá a construção do conceito, o que garante a possibilidade de utilização do conhecimento em diversos contextos;

4. O definir- significa esclarecer um conceito. O aluno deve definir com suas palavras, de forma que o conceito lhe seja claro;

5. O argumentar- após definir, o aluno precisa relacionar logicamente vários conceitos e isso ocorre através do texto falado, escrito, verbal e não-verbal;

6. O discutir- nesse passo, o aluno deve formular uma cadeia de raciocínio através da argumentação.

7. O transformar- o sétimo e último passo da (re)construção do conhecimento é a transformação. O fim da aprendizagem significativa é a intervenção na realidade. Sem esse propósito, qualquer aprendizagem é inócua.

O autor acredita que esses sete passos auxiliam a caracterizar a ação do professor diante do desafio de ensinar, capacitando-o a promover a aprendizagem significativa de seus alunos. A fim de complementar o entendimento dessa teoria, cabe ressaltar as concepções de Tavares (2004, p. 56), o qual afirma que existem três requisitos essenciais para a aprendizagem significativa:

> *A oferta de um novo conhecimento estruturado de maneira lógica, a existência de conhecimentos na estrutura cognitiva que possibilite a sua conexão com o novo conhecimento; a atitude explícita de que aprender e conectar o seu conhecimento com aquele que pretende absorver. Esses conhecimentos prévios são também chamados de conceitos subsunçores ou conceitos âncora.* (Tavares, 2004, p. 56)

A qualidade da lógica do pensamento das crianças é mais suscetível em resolver os problemas por um processo de tentativa e erro; já os adolescentes começam a pensar mais como um cientista, concebendo planos para resolver os

problemas e, sistematicamente, soluções. Eles usam raciocínio hipotético-dedutivo, o que significa que são capazes de desenvolver hipóteses ou suposições mais apuradas e uma sistemática de deduzir ou concluir.

Por isso, neste artigo, propomos uma sequência didática interdisciplinar de ensino de equações diferencias em consonância com a Física Clássica, mais especificamente com pêndulo simples com auxílio do laboratório de física. Com isso, pretendemos resolver o problema da nossa pesquisa, que é o de propormos uma sequência didática de ensino usando conceitos de aprendizagem significativa aplicada ao ensino de equação diferencial, tendo como foco o pêndulo simples e os conceitos físicos que o cercam, e assim diminuirmos o intervalo entre a parte teórica das equações diferencias e sua aplicação na física e no laboratório de física.

METODOLOGIA

No atual estado da arte, classificar uma pesquisa é um tanto difícil, já que existem inúmeros autores que falam sobre o tema, e a classificação depende também do enfoque que o autor dá à pesquisa. Porém, nesta pesquisa, iremos utilizar a forma clássica de classificação de uma pesquisa, obedecendo aos autores Dr. João Batista Turrioni e Dr. Carlos Henrique Pereira Mello.

Quanto a sua natureza, classificamos a pesquisa como básica, pois procuramos novos conhecimentos e novos processos teóricos, tendo em meta novos e melhores conhecimentos. Quanto aos objetivos, a pesquisa é explicativa, pois visa identificar os fatores que determinam ou contribuem para a ocorrência dos fenômenos. Aprofunda o conhecimento da realidade porque explica a razão, o “porquê” das coisas. Quando realizada nas ciências naturais, requer o uso do método experimental, e nas ciências sociais requer o uso do método observacional.

Quanto à forma, temos uma pesquisa quantitativa, pois todos os dados obtidos podem ser quantificados. Do ponto de vista dos métodos, a pesquisa se enquadra em teórico experimental, pois usaremos experimentos e cálculos teóricos no qual um justifica o outro.

Uma sequência didática é um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero oral ou escrito.

Pode ser caracterizada com um conjunto de aulas planejadas para ensinar um determinado conteúdo, sem que necessariamente tenha um produto final. Sua duração pode variar de dias a semanas e, desta forma, várias sequências podem ser trabalhadas durante o ano, de acordo com o planejado ou com as necessidades da classe (ZABALA, 1998, pp.53-86). Deixamos claro aqui que a nossa pesquisa é fortemente experimental de laboratórios e teórica do ponto de vista da resolução das equações diferenciais, pois não realizamos qualquer pesquisa de aprendizagem de alunos envolvidos, estes realizaram apenas os procedimentos experimentais recolhidos dos dados da pesquisa.

Este trabalho, foi desenvolvido no laboratório de Física da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões, Campus de Santo Ângelo-RS, onde se realizou o desenvolvimento experimental e as demais partes do trabalho. Na parte inicial, são apresentados alguns tópicos de Equações Diferenciais, redigindo-se um pequeno histórico. Após, sugeriu-se uma aplicação em oscilações, na qual foram obtidas as equações de forma analítica. Posteriormente, expôs-se uma conexão com a parte experimental, aplicando as equações ao modelo mais popular de oscilação, ou seja, o pêndulo simples. Mostrou-se, assim, uma sequência didática para a obtenção de dados experimentais junto com demonstrações matemáticas, sempre pensando em facilitar a aprendizagem. Não foram levantados quaisquer resultados de aprendizagem dos alunos, pois estamos propondo no trabalho pura e simples a sequência didática.

REFERENCIAL SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma Equação Diferencial tem uma incógnita em função das respectivas derivadas, sendo usada muito frequentemente para descrever processos nos quais a mudança de uma medida ou dimensão é causada pelo próprio processo. Historicamente, as primeiras Equações Diferenciais foram as relativas à aceleração, que Galileo Galilei pôde medir ainda que com métodos geométricos. Por sua vez, Isaac Newton introduziu o Cálculo Diferencial e as Equações Diferenciais como as que se conhecem hoje. Um exemplo básico é a segunda lei de Newton, da Mecânica Clássica, que popularmente consiste na afirmação

de que para uma partícula de massa m (movendo-se em uma dimensão, do ponto de vista de um referencial inercial), o produto de sua massa por sua aceleração é igual à força que age sobre ela, segundo Machado (2012).

As Equações Diferenciais, ferramentas desse processo, podem ser classificadas da seguinte forma:

- Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), se a função é desconhecida e depende de uma única variável independente. Nesse caso, aparecem apenas derivadas simples;
- Equações Diferenciais Parciais (EDP), se a função desconhecida depende de diversas variáveis independentes; neste caso, aparecem as derivadas parciais;
- Sistema de Equações Diferenciais, se existem duas ou mais funções que devem ser determinadas, é necessário um sistema de equações.

Na literatura, encontram-se alguns trabalhos que se utilizam do modelo G. Vergnaud (Modelo MATLaF), como no trabalho desenvolvido por Santos et al. (2011), para pesquisas associadas a laboratório e mapas conceituais e materiais alternativos, de acordo com Moraes e Silva Jr. (2014) e por Silva e Leal (2017). Também há estudos da aplicação de informática no estudo de oscilações, como nos trabalhos desenvolvidos por Guerrini et al. (2002) e por Medeiros e Medeiros (2002).

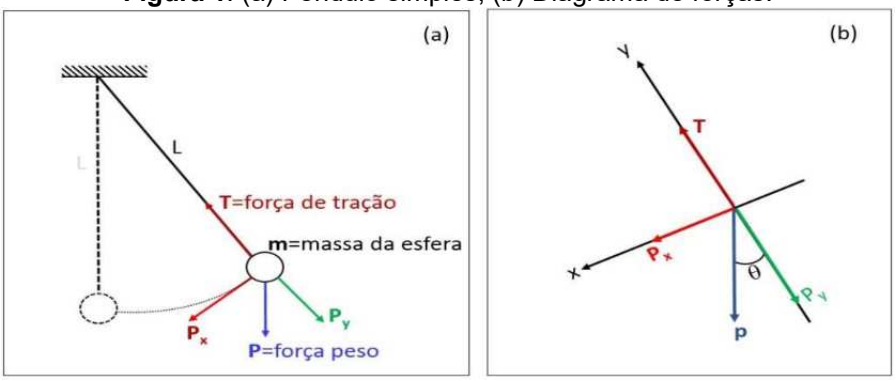
Para a aplicação da sequência didática, inicia-se pela construção teórica e entendimento do fenômeno a ser estudado, ou seja, a aplicação das leis de conservação da Física e a construção visual do fenômeno.

MOVIMENTO DE OSCILAÇÃO DOS PÊNDULOS

A oscilação de um pêndulo não é indefinida, pois sofre ações externas, como o atrito, que causam uma perda gradativa de energia mecânica, pois encontra-se uma ou mais forças contrárias ao movimento. Pode-se, inicialmente, analisar um caso mais simples, uma situação sem atrito. Assim, com a finalidade de desenvolver esse experimento, propõe-se aos alunos um pêndulo, em que o fio de comprimento L seja fino o suficiente para que o atrito seja reduzido ao máximo, nesse caso, com linha de costura de 0.25mm. Como massa oscilante, usa-se uma esfera com uma superfície extremamente lisa para diminuir ao

máximo a força de atrito do ar, uma esfera de aço, conforme a Figura 1-a. O aluno deve ser capaz de simular a respectiva situação por meio de um desenho esquemático, ou seja, o aluno deve estar apto para expressar as principais forças que atuam no experimento, mediante um diagrama de forças como o da Figura 1-b.

Figura 1: (a) Pendulo simples, (b) Diagrama de forças.



Fonte: Elaborada pelos autores

As equações do movimento do oscilador harmônico simples, sem atrito, obtêm-se pela aplicação da segunda Lei de Newton ao sistema, a força Py se anula com a força T, conforme pode ser observado no digrama de forças da figura 1-b. Resta somente uma força restauradora, contrária ao movimento: a Px. Como é um sistema oscilante, considera-se que o aluno já deve ter conhecimento da Mecânica Clássica básica, de forma a ser capaz de aplicar a segunda lei de Newton e escrever a equação do movimento.

Na próxima subseção, consta a demonstração sistemática que representa a situação do pêndulo sem atrito.

Pêndulo sem Atrito

Como já comentado, a única força atuante no sistema de modo a pôr em oscilação o pêndulo é a componente da força no eixo x, representada pela Equação1.

$$Px = mg.sen\theta \qquad \textbf{Equação 1}$$

Onde: m é a massa do pêndulo; g é a aceleração da gravidade; θ é o ângulo formado entre a força peso e a coordenada y.

Para a solução, usou-se a aproximação, considerando para ângulos pequenos $sen\theta \approx \theta (5º < \theta < 10º)$, assim, pode-se escrever aplicando a segunda Lei de Newton, descrita pela Equação 2.

$$Px = mg.\theta = ma_x \qquad \textbf{Equação 2}$$

Onde: a_x é a aceleração no eixo x.

Como a trajetória do pêndulo, conforme a Figura 1-a, é uma circunferência, pode-se escrever a aceleração tangencial (a_x) da seguinte forma: $a_x = \frac{d^2S}{dt^2}$. Reescrevendo a Equação 2), obtém-se a Equação 3, apresentada a seguir:

$$Px = mg.\theta = m\frac{d^2S}{dt^2} \qquad \textbf{Equação 3}$$

Sendo: $S = L\theta$ pode-se expressar a força restauradora em função de L (raio da circunferência) θ (ângulo).

Desse modo, consegue-se determinar a Equação 4.

$$Px = mg.\theta = m\frac{d^2L\theta}{dt^2}$$

$$mg.\theta - mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \qquad \textbf{Equação 4}$$

Dividindo os dois lados da equação anterior por mL, obtém-se a Equação 5: Dessa forma, tem-se uma equação de segundo grau homogênea.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{g}{L}\theta = 0 \qquad \textbf{Equação 5}$$

Comparando a força restauradora do pêndulo $F = -mg\,\frac{\theta}{L}$ com a equação da Lei de Hooke $F = -kx$, pode-se considerar que o k da força restauradora do pêndulo é dado por $k = -mg/L$.

Da segunda Lei de Newton para um sistema oscilante, tem-se que: $k = -m\omega^2$ e, desta forma, pode-se dizer que: $-\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$, logo, determina-se a Equação 6.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \omega^2\theta = 0 \qquad \textbf{Equação 6}$$

Trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem de coeficientes constantes que podem ser resolvidos por meio das suposições:

- $\theta = e^{mt}$
- $\frac{d\theta}{dt} = me^{mt}$
- $\frac{d^2\theta}{dt^2} = m^2e^{mt}$

Que, substituindo na Equação 6 diferencial, resulta na Equação 7.

$$m^2e^{mt} + \omega^2e^{mt} = 0 \qquad \textbf{Equação 7}$$

Nota-se que a equação anterior é uma equação característica $m^2 + \omega^2 = 0$. Resolvendo bhaskara para encontrar as raízes, obtêm-se duas raízes:

$$-b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m_1 = -0 + \frac{\sqrt{0^2 - 4\omega^2 1}}{2.1}$$

$$m_1 = -i\omega$$

$$m_2 = -0 - \frac{\sqrt{0^2 - 4\omega^2 1}}{2.1}$$

$$m_2 = +i\omega$$

Essas são raízes complexas e distintas. Portanto, a solução que segue o caso de raízes reais e distintas é formada pelas funções $e^{i\omega t}$ e $e^{-i\omega t}$, que podem expressar-se como:

- $e^{i\omega t} = cos\omega t + isen\omega t$
- $e^{-i\omega} = cos\omega t - isen\omega t$

Logo, a solução geral é representada pela Equação 8:

$$\theta(A) = C_1 cos\omega t + C_2 cos\omega t \qquad \textbf{Equação 8}$$

Como $\cos(a - b) = \cos a.cosb + sena.sen$b, definem-se $C_1\, e\, C_2$ de tal forma:

- $C_1 = A.cosd$
- $C_2 = A.send$

Logo, resulta-se na Equação 9, a seguir:

$$(t) = A.cosd.cos\omega t + A.send.sen\omega t$$

$$\theta(t) = A.\cos(\omega t - d) \qquad \textbf{Equação 9}$$

Tem-se que $A = \theta_0$ e $\theta_0 = \hat{a}ngulo\ máximo$, assim encontra-se a Equação 10. Desta forma, encontra-se a solução geral, em termos do ângulo em função do tempo.

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t - d\right) \qquad \textbf{Equação 10}$$

Pêndulo Harmônico Amortecido

A oscilação de um pêndulo não é indefinida, pois sofre ações externas, como o atrito, que causam uma perda gradativa de energia mecânica. No caso de possuir velocidade de oscilação não muito grande, admite-se uma força amortecedora do tipo: $F = -b.v$, onde b é a constante a ser determinada.

Esse movimento é dado pela seguinte equação: $F = -k.x - b.v$, onde $-k.x$ é a força restauradora do movimento harmônico amortecido, por isso o sinal negativo. A Figura 2 na sequência, a análise do movimento é quando a massa do pêndulo está subindo, para entender, basta ver a direção da velocidade. O k da equação é dado por $k = w_0^2 .m$ e fazendo $\frac{b}{m} = 2.\beta$, tem-se que $\beta = \frac{b}{2m}$. Se o amortecimento é pequeno, a solução da equação diferencial deste movimento pode ser expressa pela Equação 11.

$$X = A_0\, e^{-\beta t}\, cosw.t \qquad \textbf{Equação 11}$$

Onde, w é definido pela Equação 12:

$$w = \sqrt{{w_0}^2 - \beta^2} \qquad \textbf{Equação 12}$$

Sendo que para um pequeno amortecimento, obtém-se a Equação 13.

$${w_0}^2 - \beta^2 > 0.F = -k.x - b.v \qquad \textbf{Equação 13}$$

Usando a 2ª Lei de Newton, resulta-se na Equação 14.

$$F = -F_r - F_a \; m.a = \; - k.x \; - \; b.v \; m.\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$= - \; k.x \; - \; b.\; \frac{dx}{dt}.m.\frac{d^2x}{dt^2} \; + \; b.\frac{dx}{dt} \; + \; k.x \; = \; 0$$

Equação 14

Dividindo toda a equação pela constante variável x, tem-se a Equação 15.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}.\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}.x = 0$$ **Equação 15**

Definindo:

$$2\beta \; = \frac{b}{m} \; ;$$

$$w_0 \; = \sqrt{\frac{k}{m}} \leftrightarrow \; w_0^2 \; = \; \frac{k}{m}$$

Deste modo, determina-se a Equação 16, a seguir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta.\frac{dx}{dt} + w_0^2.x = 0$$ **Equação 16**

Polinômio característico, definido pela Equação 17.

$$r^2 \; + \; 2.\beta.r \; + \; w_0^2 \; = \; 0$$ **Equação 17**

Onde:

a= 1;

b= 2β;

c= w_0^2.

Aplicando bháskara para encontrar as raízes, obtêm-se duas raízes:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

$$r = \frac{-2\beta \pm \sqrt{(2\beta)^2 - 4.1.w_0^2}}{2.1}$$

$$r \; = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4.w_0^2}}{2}$$

$$r == \frac{-2\beta \pm \sqrt{4(\beta^2 - w_0^2)}}{2}$$

$$r == \frac{-2\beta \pm 2\sqrt{(\beta^2 - w_0^2)}}{2}$$

$$r_1 = -\beta + \sqrt{(\beta^2 - w_0^2)} \quad \text{e} \quad r_2 = \beta - \sqrt{(\beta^2 - w_0^2)}$$

Usando processo análogo usado no pêndulo sem atrito, tem-se a Equação 18.

$$X(t) = e^{-\beta t} cos(wt - \delta) \qquad \textbf{Equação 18}$$

Assim, o aluno terá resolvido na prática as Equações Diferenciais em um sistema físico muito próximo ao real. Mas será que o aluno teve a aprendizagem significativa?

Como o aluno tem capacidade de modelar e resolver problemas, propõe-se aqui um teste sensível da sua capacidade de abstrair, que é fazer o inverso, ou seja, confirmar o seu modelo abstrato na prática, realizando o experimento.

MÉTODOS EXPERIMENTAIS DO PÊNDULO AMORTECIDO

Materiais

Para a realização do experimento, são necessários os seguintes materiais: uma bolinha de pingue-pongue suspensa do teto da sala; um cronômetro.

Procedimentos

Deslocar a bolinha da posição de equilíbrio para uma posição de amplitude inicial A_0.

Registrar as oscilações em uma tabela a amplitude e o tempo decorrido a cada meia oscilação.

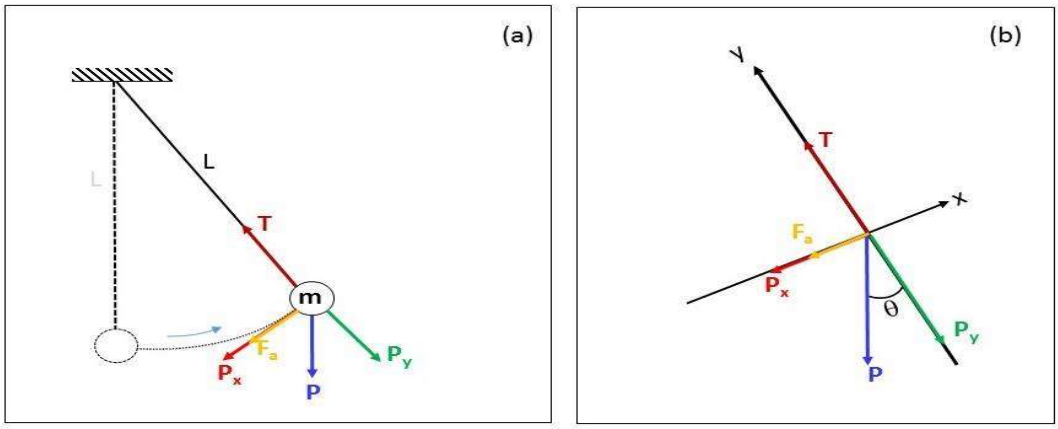
Cálculos matemáticos e aplicações de algumas leis físicas para a resolução da equação do pêndulo simples, com movimento harmônico amortecido.

Descrição da Experiência

A experiência foi realizada com o equipamento de massa (m) de 2,6 g, de comprimento (l) de 3,36 m e um ângulo de 150 graus.

Conforme a Figura 2, o pêndulo começou a oscilar e sua angulação atingiu 15º. Esse é o ângulo máximo para que o $sen\ \theta = \theta$.

Figura 2: (a) Pêndulo simples amortecido. (b) Diagrama de forças.



Fonte: Elaborados pelos autores

Primeiramente, foram analisadas as distâncias que o pêndulo percorreu a cada ¼ de oscilação. Em seguida, por meio de uma nova oscilação, sempre partindo do repouso, registrou-se o tempo de três oscilações completas e de ¼ da oscilação, o que forneceu valores aproximados para o tempo de uma oscilação completa, ou seja, para o período de oscilação do pêndulo.

Dados experimentais

Os dados apresentados na Tabela 1 são os valores para mais de três oscilações completas, ou seja, cada dois dados correspondem a uma oscilação completa, vejamos a seguir.

Tabela 1: Valores para mais de três oscilações completas.

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
Comprimento (cm)	87	64	46,5	38	29	24,5	21,5	19	15	14	11,5

Fonte: Elaborada pelos autores

O tempo de três oscilações completas foi de 11,2 segundos, sendo que o tempo correspondente à oscilação foi de 3,73 segundos. Por sua vez, o tempo a cada meia oscilação foi de 1,865 segundos. Por meio dos dados obtidos no experimento e da medida do tempo, conclui-se que o período desse pêndulo é de 3,73 segundos. Esses dados estão representados na Figura 3.

Entretanto, é possível calcular o período desse pêndulo pela Equação 19.

$$T = 2\pi.\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \textbf{Equação 19}$$

Aplicando a equação anterior, obtêm-se 3,67 segundos para o período.

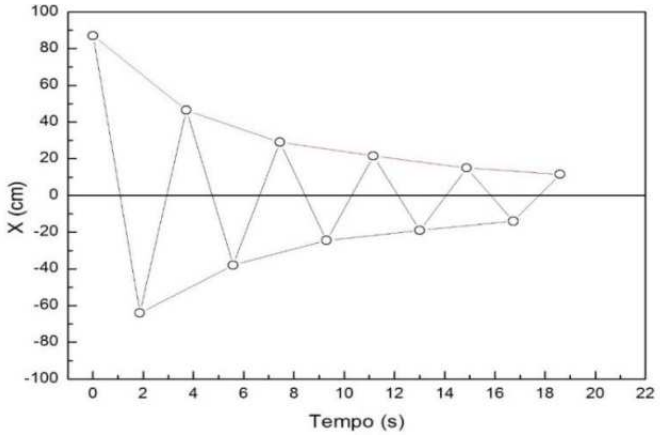
$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{3{,}36m}{9{,}81m/s^2}}$$

$$T = 2.\pi.\sqrt{0{,}342s^2}$$

$$T = 2.\pi.0{,}584s$$

$$T = 3{,}67s$$

Figura 3: Gráfico Comprimento versus Tempo



Fonte: Os Autores

O período do pêndulo obtido com a fórmula é menor, pois a fórmula não leva em consideração a força do atrito causada pela resistência do ar, o que faz com que o período de oscilação aumente, gradativamente.

Em seguida, é possível determinar o valor de w_0, o qual pode ser obtido por meio da fórmula: $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, onde $k = \frac{mg}{l}$, a qual fornece a Equação 20.

$$w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \textbf{Equação 20}$$

Logo, obtém-se pela equação anterior o valor de w_0 de 1,7085/s.

$$w_0 = \sqrt{\frac{9{,}81\ m/s^2}{3{,}36m}}$$

$$w_0 = \sqrt{2{,}919\ /s^2}$$

$$w\ =\ 1{,}7085/s$$

Partindo do w_0, encontra-se o valor de w, pela Equação 21. No entanto, o β é encontrado no gráfico $ln.x$ versus t(tempo), representado pela Figura 4. Os dados utilizados para plotar esse gráfico estão apresentados na Tabela 2.

$$w = \sqrt{{w_0}^2 - \beta^2}$$

Equação 21

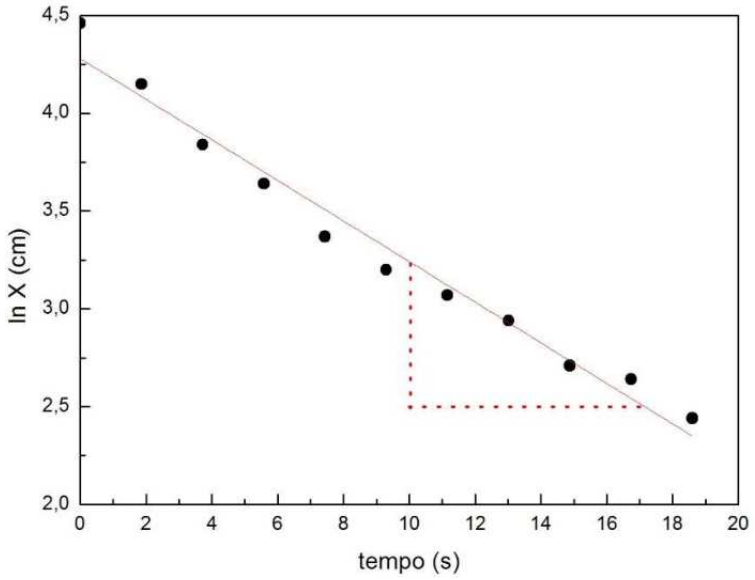
Tabela 2: Resultados encontrados para o $ln.x$.

	X(cm)	t(s)	$ln.x$
A_0	87	0=0	4,46
A_1	-64	1,86=1/2t	4,15
A_2	46,5	3,72=t	3,84
A_3	-38	5,58=3/2t	3,64
A_4	29	7,44=2t	3,37
A_5	24,5	9,3=5/2t	3,2
A_6	21,5	11,16=3t	3,07
A_7	-19	13,02=7/2t	2,94
A_8	15	14,88=4t	2,71
A_9	-14	16,74=9/2t	2,64
A_{10}	11,5	18,6=5t	2,44

Fonte: Os Autores

Os valores encontrados na tabela 2 para $ln\,(X)$ foram utilizados para plotar o gráfico representado na Figura 4.

Figura 4: Gráfico $ln.x$ *versus* t.



Fonte: Elaborado pelos autores.

A partir do gráfico demostrado pela Figura 3, é possível obter a variação de $x.cos\,(t)$ para as oscilações amortecidas do pêndulo. Nesse gráfico, a amplitude das oscilações não é constante e pode ser expressa pela Equação 22.

$$Ae^{-\beta t} \qquad \textbf{Equação 22}$$

Por meio do gráfico representado pela Figura 4, revelou-se o valor de β, o qual é calculado pela Equação 23.

$$\beta = \frac{ln_1 - ln_8}{t_8 - t_1} \qquad \textbf{Equação 23}$$

Fazendo uso da equação anterior, encontra-se o valor de β de -0,104.

$$\beta = \frac{2{,}5 - 3{,}23}{17{,}15 - 10{,}04}$$

$$\beta = \frac{-0{,}73}{7{,}11}$$

$$\beta = -0{,}104$$

Para o cálculo do valor de w, demostrado a seguir, utiliza-se a Equação 21.

$$w = \sqrt{1{,}7085^2 - 0{,}104^2}$$

$$w = \sqrt{2{,}919 - 0{,}011}$$

$$w = 1{,}705/s$$

A solução particular para esse oscilador está representada em sequência:

$$x(t) = 87e^{-0{,}104t}\, cos\,(1{,}705.t)$$

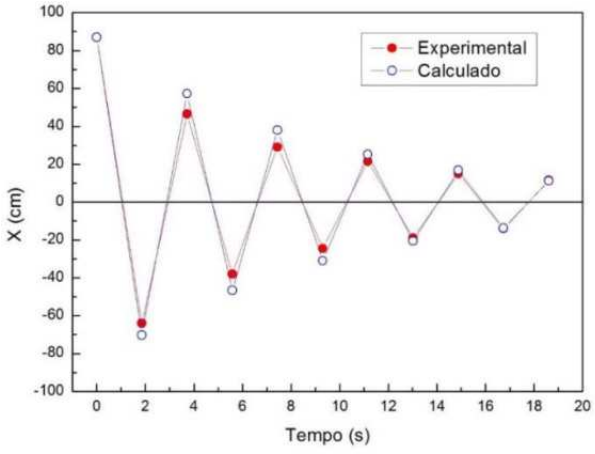
A partir dessa solução, foram obtidos os dados descritos na Tabela 3, os quais foram utilizados para desenvolver a representação do gráfico demostrado pela Figura 5.

Tabela 3: Dados obtidos com a solução particular.

Tempo (s)	$x(t) = 87e^{-0{,}104t}\, cos\,(1{,}705.t)$
0,00	87,00
1,86	-71,67
3,72	58,99
5,58	-48,50
7,44	39,85
9,30	-32,71
11,16	26,82
13,02	-21,98
14,88	17,99
16,74	-14,72
18,60	12,02

Fonte: Os Autores

Figura 5: Representação gráfica dos dados obtidos com a solução particular.



Fonte: Os Autores

Finalmente, o valor de b, ou seja, o coeficiente de amortecimento foi obtido pela Equação 24.

$$2.\beta = \frac{b}{m} \qquad \textbf{Equação 24}$$

Isolando a variável b da equação anterior, obtemos:

$$b = 2.\beta.m$$

$$b = 2.0{,}11.2{,}6$$

$$b = 0{,}572$$

Desta forma, encontra-se o valor correspondente a 0,572 para o b.

CONCLUSÃO

No campo metodológico, esta investigação destacou a importância do trabalho interdisciplinar desenvolvido na área da Física, Matemática e o laboratório de ensino envolvendo conceitos das Ciências Exatas do Ensino Superior. E, ainda, nas observações extraídas dos cálculos realizados, percebeu-se, também, o potencial de uma sequência didática que vai além do saber de uma disciplina isolada, que procura conexões com aprendizagens desenvolvidas na disciplina de cálculo do curso de Engenharia. Assim, deve proporcionar, além de uma aprendizagem efetiva, um entendimento físico, possibilitando um estudo aplicado analítico sobre os sistemas pendulares.

Nesta perspectiva, foi possível analisar algumas situações que merecem destaque: primeiramente, a de um pêndulo simples sem atrito e, em seguida, de um pêndulo harmônico amortecido, o qual possibilitou identificar que as oscilações têm uma amplitude constante. Porém, sabe-se, por meio da experiência prática desenvolvida em laboratório, que um pêndulo oscila com uma amplitude que gradualmente decresce e, eventualmente, para.

Conclui-se, a partir dessa afirmação e dos dados obtidos na experiência, que todos os corpos que vibram como, por exemplo, uma mola ou um pêndulo, não possuem oscilações com amplitude constante, pois sofrem a ação de agentes do meio e da energia que é perdida pela partícula que executa o movimento e absorvida pelo meio no qual o movimento se processa. Logo, os

conceitos apresentados nesta pesquisa serão, na lógica de Piaget, possíveis de serem obtidos, já que os alunos estão na fase operatória formal.

As conexões estabelecidas no decorrer da existência são mediadas pelo diálogo. Assim, a aprendizagem passa a ser resultado das trocas de saberes entre os envolvidos no contexto da educação escolar. Também pode-se inferir que, a partir dessa conexão de saberes, a aprendizagem poderá ser efetivamente significativa para o educando, na medida em que se reconhece como ator partícipe da construção do seu conhecimento, ou seja, a educação formal precisa ser capaz de contribuir na construção de saberes e ampliar as possibilidades de formação.

REFERÊNCIAS

ALBARELLO, J. R.; DUARTE, K. P.; FAORO, V.. Oscilação e Velocidade do Pêndulo Simples na Modelagem Matemática. **Vivências**, v. 9, p.83-94, 2013.

AUSUBEL, D. P. **Educational psychology**. Editora Interamericana: Rio de Janeiro, 1980.

BECKER, F. **Abstração pseudoempírica:** significado epistemológico e impacto metodológico. Educ. Real, v. 42, p. 371-393, 2017.

GUERRINI, I.M; MAGALHÃES, M.G.M. DE; MAREGA JR. E. Utilizando tecnologia computacional na analise quantitativa de movimentos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 24, p.97-102, 2002.

HALLIDAY, D. **Fundamentos da física**. São Paulo, 1996.

MACHADO, K. D. **Equações diferenciais aplicadas**. v.1, p.750, Paraná: Todapalavra, 2012.

MADRUGA, J. A. G. In: **Desenvolvimento psicológico e educação**: psicologia da educação, editado por C. COLL, J. PALÁCIOS, A. MARCHESI (Artes Médicas, Porto Alegre, 1996).

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. F. Possibilidade e limitações das simulações computacionais no ensino de Física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 24, p.77-78, 2002.

MORAES, J. U. P.; SILVA Jr., R. S. Experimentos Didáticos no Ensino de Física com Foco na Aprendizagem Significativa. **Aprendizagem Significativa em Revista**, v. 4, p.61-67, 2014.

MOREIRA, M. A.. ¿Al afinal, qué es aprendizaje siginificativo? **Qurriculum,** v. 25, p.29-56, (2012).

NEWTON, I**. Mathematical Principles of Natural Philosophy**. Berkeley: University of California Press, 1934.

SANTOS, A. V; KRAUSE, J. C.; HECK, M. F.; OZINKOSKI, R. **Sequência didática Interdisciplinar no Ensino de Equações Diferenciais nos Cursos de Engenharia**. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, Anais... Blumenau/SC, 2011.

SANTOS, J. C. F.. **O desafio de promover a aprendizagem significativa**. Disponível em: <https://www.unisul.br/wps/wcm/connect/127c2459-227a-4d70-a0cf-331c2343349b/desa fio-aprendizagem-significativa_integracaouniversitaria_extensao.pdf?MOD=AJPERES>. Acesso em: 7 março 2017.

SILVA, J. C. X.; LEAL, C. E. S. Sequência didática de laboratório de física de baixo custo para escolas da rede pública de ensino médio. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 39, n.1, 2017.

TAVARES, R.. **Aprendizagem Significativa.** Conceitos, v.55, p.10-50, 2004.

TURRIONI, J. B.; MELLO, C. H. P. **Metodologia de Pesquisa em Engenharia de Produção: Estratégias, Métodos e Técnicas para Condução de Pesquisas Quantitativas e Qualitativas.** Itajubá: UNIFEI, 2012.

VERGNAUD, GÉRARD. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en didactique des mathématiques**, v.10, p.133-170, 1990.

ZANELLA, L.. In: **Psicologia da educação:** o significado do aprender, editado por J. L. ROSA. EDIPUCRS, Porto Alegre, 1999.

SOBRE OS AUTORES:

Antônio Vanderlei Santos - Doutor em Física (UFRGS), docente (URI- Campus Santo Ângelo). E-mail: vandao@san.uri.br

Miriam Ferrazza Heck - Doutoranda em Ensino de Ciências e Matemática (ULBRA). E-mail: mhecmat@hotmail.com

João Carlos Krause - Doutor em Física (UFRGS), docente (URI- Campus Santo Ângelo). E-mail: krause@san.uri.br

Rozelaine Fátima Franzin - Doutora em Engenharia de Produção, docente (URI- Campus Santo Ângelo). E-mail: rozelaine@san.uri.br

Cênio Back Weyh - Doutor em Educação (UNISINOS), docente (URI- Campus Santo Ângelo). E-mail: ceniow@san.uri.br