RUNGE-KUTTA APLICADO A PROBLEMAS UNI E BIDIMENSIONAIS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS

Runge Kutta applied the problems one and two-dimensionals from the fluid mechanics.

Estaner Claro ROMÃO
Faculdade de Jaguariuna

Resumo: Com objetivo didático, apresenta-se a solução numérica de problemas da mecânica dos fluidos utilizando o Método Runge-Kutta de 4ª ordem para solucioná-los. Este método é uma expansão das séries de Taylor, sendo a ordem do Runge-Kutta determinada a partir dos termos abandonados das séries de Taylor. Para avaliar este método foram escolhidos dois casos: (1) problema unidimensional, queda livre de um corpo, sendo nesta aplicação comparadas as ordens 1 a 4 do Runge-Kutta, visando demonstrar sua eficiência, principalmente o de 4ª ordem; (2) um caso bidimensional, lançamento de uma bala de canhão, sendo solucionado utilizando Runge-Kutta de ordem 4.
Palavras-chave: mecânica dos fluídos, método Rung-Kutta; série de Taylor.

Abstract: Along didatic objectiv, presents the numeric solution of problems from the mechanics of the fluids by using the method Runge Kutta as of 4ª command about to solve us. This method that's a expansion of the Taylor's series , being the order from the Runge Kutta determined from the Taylor's series using derelict terms. Two case have been chosen for evaluating this method: (1) unidimensional problem, downfall of a body , being in this application compared the orders 1 to 4 from the Runge Kutta, to aiming demonstrate your efficiency , principally the one as of 4ª (2) a two-dimensional case,, launch of a bullet of cannon, being to solve by using Runge Kutta as order 4.
Keywords: fluid mechanics; Runge-Kutta method; Taylor series.

INTRODUÇÃO

A solução de problemas de valor inicial que envolvem equações diferenciais ordinárias não lineares é feito, quase sempre, através de métodos numéricos. Entre os métodos mais utilizados encontra-se o método de Runge-Kutta que permite solução de problemas que envolvem equações (ou sistemas de equações) diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem, por se tratar de um método simples, de fácil implementação em computadores de pequeno e grande porte e ter uma boa precisão numérica.

Este método é aplicado na solução de problemas de diversas áreas da engenharia e em mecânica dos fluidos têm interesse especial para estudo de movimentos uni e bidimensionais de corpos tais como problemas que envolvem queda livre de corpos em meio fluido, problemas de balística, movimentos pendulares, vibrações livres e forçadas, entre outros. Neste trabalho, iniciaremos apresentando uma breve introdução do Método de Runge-Kutta, e logo a seguir a formulação e a aplicação numérica de dois casos, sendo um no domínio unidimensional (queda livre de um corpo) e o outro no domínio bidimensional (lançamento de uma bala de canhão).

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Considere inicialmente um caso geral de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem com a seguinte forma geral:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \qquad (1)$$

onde f é uma função analítica. Se num instante inicial, $t = t_0$, a função x tem um valor conhecido x_0, e é desejado encontrar $x(t)$ para todo $t \geq t_0$, que satisfaz a equação diferencial (1) e as condições iniciais descritas acima, então este problema é chamado problema de valor inicial.

Para solução numérica deste problema, a variável independente é, normalmente, subdividida em passos pequenos de largura h, de maneira que todos os pontos podem ser encontrados por:

$$t_i = t_0 + ih, \;\; i = 0,1,2,3,... \qquad (2)$$

A solução obtida no ponto t_i é denominada x_i. Assim, pelo uso de métodos numéricos a função $x(t)$ pode ser aproximada nos diversos pontos por valores discretos x_i, $i = 1,2,3,...$. Se a função $x(t)$ é uma função analítica e h é pequeno, a solução em qualquer ponto pode ser obtida por expansão, em torno do ponto, por série de Taylor como (Gerard & Wheatley, 1999):

$$x_{i+1} \equiv x(t_{i+1}) \equiv x(t_i + h) \tag{3}$$

$$x_{i+1} = x_i + h\left(\frac{dx}{dt}\right)_i + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_i + ... + \frac{h^n}{n!}\left(\frac{d^nx}{dt^n}\right)_i \tag{4}$$

ou

$$x_{i+1} = x_i + hf_i^{'} + \frac{h^2}{2!}f_i^{''} + ... + \frac{h^n}{n!}f_i^n \tag{5}$$

onde $f_i^n = d^n / dt^n$, avaliada no ponto (x_i, y_i), f geralmente é função de x e t, e sua derivada pode ser calculada como (Carnhahan, Luther & Wilkes, 1969):

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x} \tag{6}$$

Derivadas de ordem mais altas podem ser calculadas por regras semelhantes.

O uso da expansão por série de Taylor de funções em torno do ponto é limitado a funções simples e, além disso, este método é de difícil implementação em computadores, principalmente por envolver o cálculo de derivadas. Nesses casos o método de n ordem de Runge-Kutta é normalmente utilizado. Neste método é necessário avaliar a função f, com argumentos adequadamente escolhidos, no lugar das derivadas. A fórmula de Runge-Kutta mais utilizada é a de quarta ordem (Butcher, 1987):

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(\Delta_1 x_i + 2\Delta_2 x_i + 2\Delta_3 x_i + \Delta_4 x_i) \tag{7}$$

onde:

$$\Delta_1 x_i = hf(x_i, t_i) \tag{8a}$$

$$\Delta_2 x_i = hf\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta_1 x_i, t_i + \frac{1}{2}h \right) \quad (8b)$$

$$\Delta_3 x_i = hf\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta_2 x_i, t_i + \frac{1}{2}h \right) \quad (8c)$$

$$\Delta_4 x_i = hf\left(x_i + \Delta_3 x_i, t_i + h \right) \quad (8d)$$

Detalhes das fórmulas de Runge-Kutta de ordens 1, 2 e 3 podem ser encontradas com detalhes em (Barroso et al., 1987).

Este método pode ser ampliado para resolver equações diferenciais ordinárias de ordem maior que um ou sistemas de equações diferenciais ordinárias. Para exemplificar considere a seguinte equação diferencial ordinária e sua condição inicial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t \right) \quad (9)$$

com

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 \\ \dfrac{dp}{dt} = p_0 \end{array}\right\} \text{ em } t = t_0 \quad (10)$$

Introduzindo uma nova variável p podemos reescrever a equação acima com um sistema de equações:

$$\frac{dx}{dt} = p \quad (11)$$

$$\frac{dp}{dt} = F(x, p, t) \quad (12)$$

com as seguintes condições iniciais: $x(t_0) = x_0$ e $p(t_0) = p_0$.

Para um problema deste tipo teremos x_{i+1} e p_{i+1} semelhantes a Equação 7.

APLICAÇÕES NUMÉRICAS: CORPO EM QUEDA LIVRE

Formulação do Problema

Como primeira aplicação do Método Runge-Kutta vamos estudar o movimento de uma esfera em queda livre num meio fluido. Para isso deve-se fazer um balanço das forças que atuam sobre a esfera. O eixo de coordenadas z é escolhido na direção da aceleração gravitacional g_z e sua origem coincide com o centro da esfera no tempo $t = 0$. A esfera tem diâmetro d, massa m e velocidade inicial v_0. O meio que a envolve tem densidade ρ_f e viscosidade ν. As forças a considerar são: Força de empuxo, Força devido a aceleração do corpo, Forças viscosas (forças de superfície), Ondas de arrasto e forças de corpo. Considerando todas essas forças obtemos o seguinte sistema (maiores informações da formulação podem ser encontradas em Carnhahan, Luther & Wilkes, 1969):

$$F_1(v,t) = F(v) = \frac{1}{1+\frac{\overline{\rho}}{2}}\left[(1-\overline{\rho})g - \frac{3\overline{\rho}}{4d} v \mid v \mid C_D(v)\right] \tag{13}$$

e

$$F_2(z,t) = F(z) = v \tag{14}$$

no qual para a avaliação do coeficiente de arrasto podem ser utilizadas as equações (Butcher, 1987):

$$C_D = \begin{cases} \dfrac{24}{\mathrm{Re}} & \mathrm{Re} \le 1 \\ \dfrac{24}{\mathrm{Re}^{0,646}} & 1 < \mathrm{Re} \le 400 \\ 0,5 & 400 < \mathrm{Re} \le 3\times10^5 \\ 0,000366\,\mathrm{Re}^{0,4275} & 3\times10^5 < \mathrm{Re} \le 2\times10^6 \\ 0,18 & \mathrm{Re} > 2\times10^6 \end{cases} \tag{15}$$

Para este problema serão utilizadas as fórmulas de Runge-Kutta de ordem 1 a 4, com o objetivo de comparar os resultados obtidos a partir das formulações a seguir:

Método Runge-Kutta de 1ª ordem

$v_{i+1} = v_i + \Delta h B$, no qual $B = \left(\frac{1}{1+\frac{\overline{\rho}}{2}} \right) \left[(1-\overline{\rho}) g - \frac{3\overline{\rho}}{4d} v_i \mid v_i \mid C_D \right]$ com

$z_{i+1} = z_i + \Delta h v_i$.

Método Runge-Kutta de 2ª ordem

$v_{i+1} = v_i + \Delta h \left[\frac{1}{2} B + \frac{1}{2} A \right]$, sendo

$B = \left(\frac{1}{1+\frac{\overline{\rho}}{2}} \right) \left[(1-\overline{\rho}) g - \frac{3\overline{\rho}}{4d} v_i \mid v_i \mid C_D \right]$ e

$A = \left(\frac{1}{1+\frac{\overline{\rho}}{2}} \right) \left[(1-\overline{\rho}) g - \frac{3\overline{\rho}}{4d} (v_i + \Delta h B) \mid v_i + \Delta h B \mid C_D \right]$ com $z_{i+1} = z_i + \Delta h v_i$.

Método Runge-Kutta de 3ª ordem

$v_{i+1} = v_i + \frac{2}{9} k_1 + \frac{1}{3} k_2 + \frac{4}{9} k_3$, com

$k_1 = \Delta h \left(\frac{1}{1+\frac{\overline{\rho}}{2}} \right) \left[(1-\overline{\rho}) g - \frac{3\overline{\rho}}{4d} v_i \mid v_i \mid C_D \right]$ e

$$k_2 = \Delta h \left(\frac{1}{1+\frac{\overline{\rho}}{2}} \right) \left[(1-\overline{\rho}) g - \frac{3\overline{\rho}}{4d} A \mid A \mid C_D \right], \text{ com } A = v_i + \frac{1}{2} k_1$$

$$k_3 = \Delta h \left(\frac{1}{1+\frac{\overline{\rho}}{2}} \right) \left[(1-\overline{\rho}) g - \frac{3\overline{\rho}}{4d} B \mid B \mid C_D \right], \quad \text{com} \quad B = v_i + \frac{3}{4} k_2 \quad \text{e}$$

$z_{i+1} = z_i + \Delta h v_i$.

Método Runge-Kutta de 4ª ordem

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right), \text{ com}$$

$$k_1 = \Delta h \left(\frac{1}{1+\frac{\overline{\rho}}{2}} \right) \left[(1-\overline{\rho}) g - \frac{3\overline{\rho}}{4d} v_i \mid v_i \mid C_D \right],$$

$$k_2 = \Delta h \left(\frac{1}{1+\frac{\overline{\rho}}{2}} \right) \left[(1-\overline{\rho}) g - \frac{3\overline{\rho}}{4d} A \mid A \mid C_D \right], \text{ com } A = v_i + \frac{1}{2} k_1$$

$$k_3 = \Delta h \left(\frac{1}{1+\frac{\overline{\rho}}{2}} \right) \left[(1-\overline{\rho}) g - \frac{3\overline{\rho}}{4d} B \mid B \mid C_D \right], \text{ com } B = v_i + \frac{1}{2} k_2$$

$$k_4 = \Delta h \left(\frac{1}{1+\frac{\overline{\rho}}{2}} \right) \left[(1-\overline{\rho}) g - \frac{3\overline{\rho}}{4d} C \mid C \mid C_D \right], \text{ com } C = v_i + k_3 \text{ e } z_{i+1} = z_i + \Delta h v_i .$$

Resultados Numéricos

Como dados iniciais foram considerados: $g = 10m/s^2$, $v_0 = 0$, $z_0 = 0$ e $\gamma_f = 1\times10^{-6} m^2/s$ e variando as ordens do Método de Runge-Kutta ($\overline{\rho} = 0{,}5$ e $\Delta h = 0{,}01s$)

Primeiramente foi construído um gráfico (Figura 1) que apresenta a variação de velocidade em m/s do instante h = 0 até o instante h = 0,3s, no qual a velocidade já pode ser considerada constante para 3 casas decimais (a partir de 0,3s).

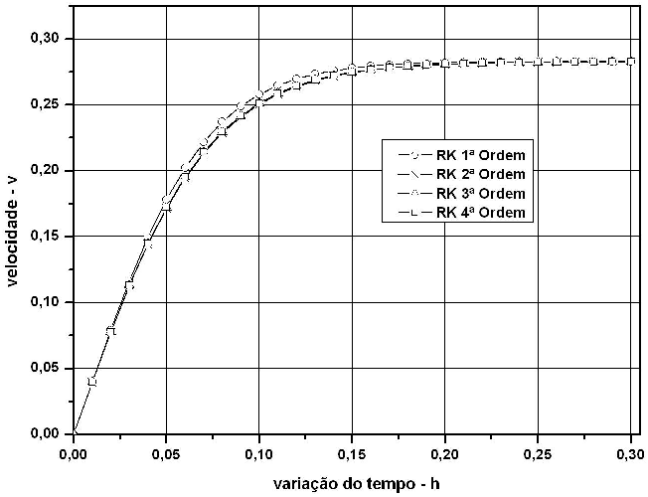

Figura 1. Variação de $v\times h$.

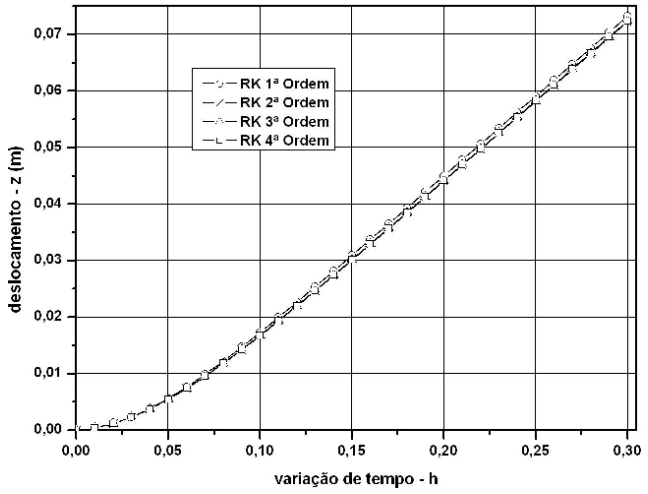

Figura 2. Variação $z\times h$.

Para o mesmo caso também foi construído um gráfico para o deslocamento da esfera até h = 0,3s (Figura 2).

É importante destacar que a Figura 2 apresenta o deslocamento até o momento em que a velocidade começa a se tornar constante.

Na Equação 15 tem-se que para $1 < \mathrm{Re} \leq 400$ temos $C_D = \frac{24}{\mathrm{Re}^{0,646}}$ e para $400 < \mathrm{Re} < 3 \times 10^5$ temos $C_D = 0,5$. Após uma análise do problema, percebe-se que $\mathrm{Re} \leq 400$ acontece somente nos primeiros três passos no tempo, sendo assim, assumindo o erro cometido nesta consideração, todos os cálculos destes problemas foram feitos considerando-se $C_D = 0,5$. A seguir, apresenta-se um gráfico com a variação de Reynolds ao longo do tempo nas quatro ordens do Método de Runge-Kutta aqui avaliadas.

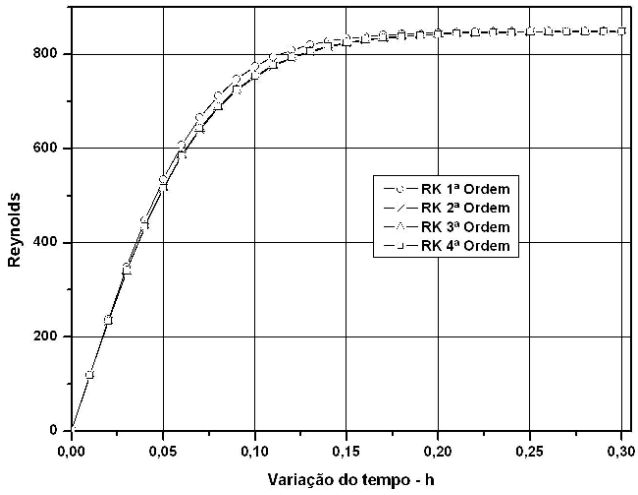

Figura 3. Variação $\mathrm{Re} \times h$.

Como pode-se perceber nas Figuras 1, 2 e 3, o Método de Runge-Kutta apresentou resultados muito semelhantes nas quatro ordens avaliadas neste trabalho, quando a análise é qualitativa. Com o objetivo de avaliar o erro cometido na utilização do Método de Runge-Kutta, variando-se as ordens, será apresentado a seguir um gráfico avaliando o erro pontual para cada ordem (ordens 1 a 4), para tal construção foi utilizado a seguinte regra:

$$e_i = |v_i - V_i|,$$

no qual e_i é o erro pontual, v_i é o valor da velocidade no ponto i (avaliando-se cada ordem do método separadamente) e V_i foi o valor ótimo considerado para a norma (Todos os parâmetros iguais, exceto que Δh = 0,001 para o Método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Este parâmetro foi adotado desta maneira, devido a falta de uma solução analítica).

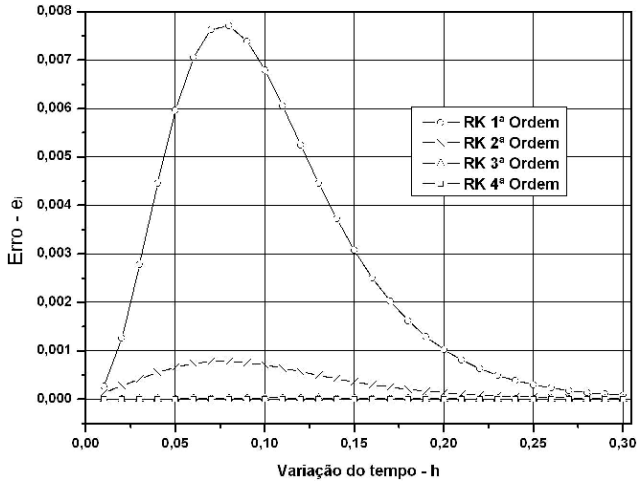

Figura 4. Avaliação do erro cometido e_i ao longo do tempo h.

Como pode-se ver, os Métodos de Runge-Kutta de 1ª e 2ª ordens apresentam erros mais expressivos quando comparados aos de ordem 3 e 4. Mas para uma análise mais detalhada, agora constrói-se um gráfico com as mesmas características, mas apenas avaliando-se o Método de Runge-Kutta de 3ª e 4ª ordens.

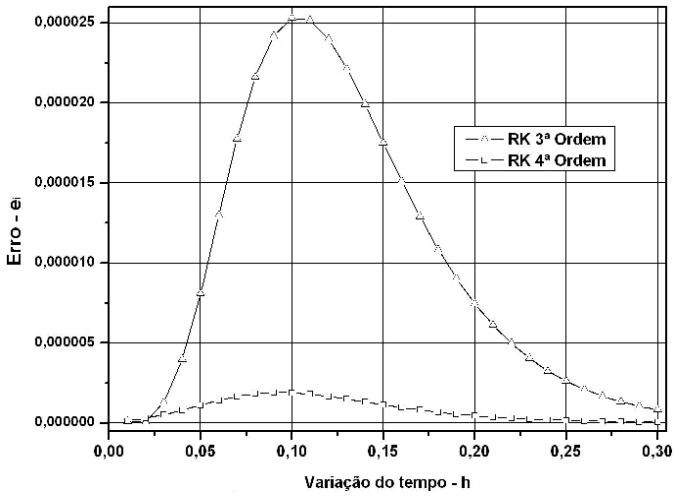

Figura 5. Avaliação do erro cometido e_i apenas pelas ordem 3 e 4.

É imediato, a partir da avaliação das Figuras 4 e 5, que o Método de Runge-Kutta de 4ª ordem é o que apresenta os melhores resultados.

APLICAÇÕES NUMÉRICAS: LANÇAMENTO DE UMA BALA DE CANHÃO

Nesta aplicação será aplicada apenas o Método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Formulação do Problema

A formulação deste problema é dada pelas equações a seguir:

$$F(x) = \frac{dx}{dt} = u$$

$$F(y) = \frac{dy}{dt} = v$$

$$F(u) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{3\overline{\rho}}{4d}(u - u_v)\,|V_r|\,C_D$$

$$F(v) = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{3\overline{\rho}}{4d}v\,|V_r|\,C_D$$

nos quais d é o diâmetro da esfera, V_0 é a velocidade vetorial inicial, θ é o ângulo de disparo, u e v são as componentes horizontal e vertical da velocidade respectivamente, γ é a viscosidade do ar, u_v é a velocidade do vento na direção horizontal (v_v é a velocidade do vento na direção vertical, que neste problema será considerada nula), $\overline{\rho} = \rho_f / \rho_e$, sendo que ρ_f é a densidade do fluido e ρ_e é a densidade da esfera, $C_D = f(\mathrm{Re})$ conforme Equação 15, com $\mathrm{Re} = V_r d / \gamma$, sendo V_r a velocidade relativa entre a esfera e o ar dada por $V_r = \sqrt{(u - u_v)^2 + v^2}$.

Agora, aplicando-se o Método de Runge-Kutta de 4ª ordem para Δh sendo o passo no tempo, temos a seguinte formulação:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta h u_i + \frac{\Delta h}{6}\left(ku_1 + ku_2 + ku_3\right),$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta h v_i + \frac{\Delta h}{6}\left(kv_1 + kv_2 + kv_3\right),$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}\left(ku_1 + 2ku_2 + 2ku_3 + ku_4\right),$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}\left(kv_1 + 2kv_2 + 2kv_3 + kv_4\right),$$

nos quais,

$$ku_1 = \Delta h\left(-\frac{3\overline{\rho}}{4d}\right)(u_i - u_v)\,|V_r|\,C_D,$$

$$ku_2 = \Delta h\left(-\frac{3\overline{\rho}}{4d}\right)(u_i + 0{,}5ku_1 - u_v)\,|V_r|\,C_D,$$

$$ku_3 = \Delta h\left(-\frac{3\overline{\rho}}{4d}\right)(u_i + 0{,}5ku_2 - u_v)\,|V_r|\,C_D,$$

$$ku_4 = \Delta h\left(-\frac{3\overline{\rho}}{4d}\right)(u_i + ku_3 - u_v)\,|V_r|\,C_D,$$

$$kv_1 = \Delta h\left[-g - \frac{3\overline{\rho}}{4d}v_i\,|V_r|\,C_D\right],$$

$$kv_2 = \Delta h\left[-g - \frac{3\overline{\rho}}{4d}(v_i + 0{,}5kv_1)\,|V_r|\,C_D\right],$$

$$kv_3 = \Delta h\left[-g - \frac{3\overline{\rho}}{4d}(v_i + 0{,}5kv_2)\,|V_r|\,C_D\right],$$

$$kv_4 = \Delta h\left[-g - \frac{3\overline{\rho}}{4d}(v_i + kv_3)\,|V_r|\,C_D\right].$$

Resultados Numéricos

Para este problema serão adotadas as seguintes constantes: $\rho_e = 7800kg/m^3$, $d = 0{,}1m$, $V_0 = 100m/s$, $\theta = 45º$, $u_v = 10m/s$, $\rho_f = 1{,}2kg/m^3$ e $\gamma = 2\times10^{-5}m^2/s$.

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM COM $\theta = 45º$.

Para este problema foram construídos alguns gráficos, dentre eles os gráficos que apresentam a velocidade na direção horizontal (u) com relação ao eixo x, Figura 6, e a da vertical (v) com relação ao eixo y, Figura 7.

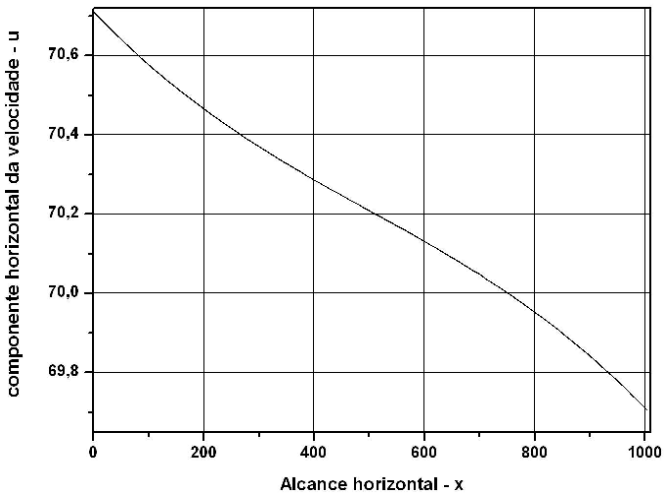

Figura 6. Variação de $u \times x$.

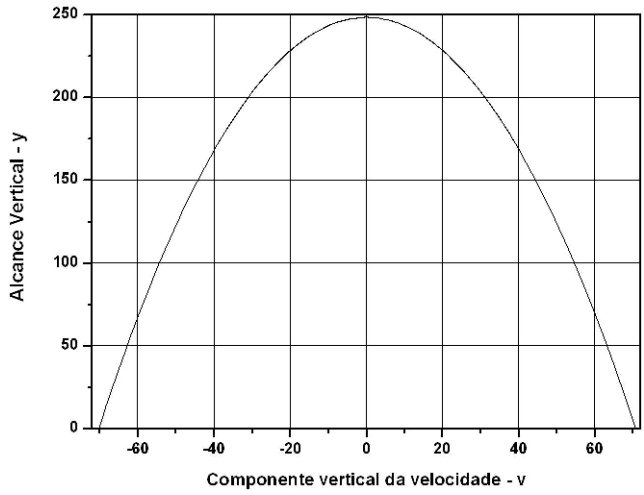

Figura 7. Variação de $v \times y$.

Para uma avaliação mais completa dos dois gráficos anteriores (Figuras 6 e 7), coloca-se u e v no mesmo gráfico (Figura 8) variando com o tempo h (com $\Delta h = 0{,}1$), mostrando que a velocidade horizontal u é praticamente constante ao longo do tempo, enquanto que a velocidade vertical v é decrescente.

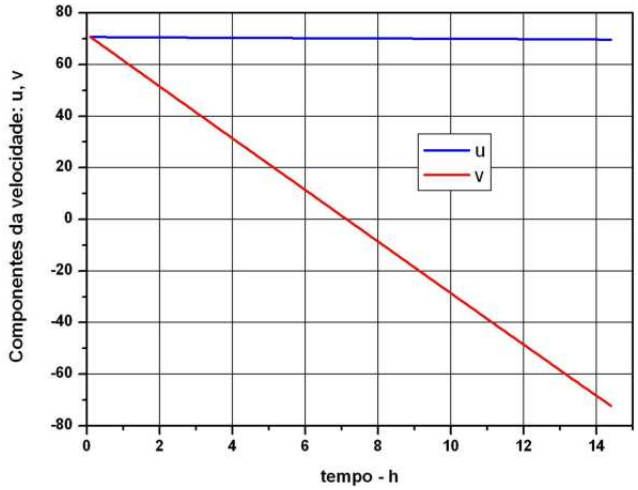

Figura 8. Variação $(u, v) \times h$.

E por fim, apresenta-se um gráfico (Figura 9) contendo a variação da velocidade vetorial $\vec{V}$ em função do tempo, $\vec{V}$ que apresenta um perfil parabólico, ou seja, a velocidade vetorial diminui até um determinado valor, valor este diretamente relacionado com a altura máxima atingida pela bala de canhão, e volta a aumentar até o seu valor inicial.

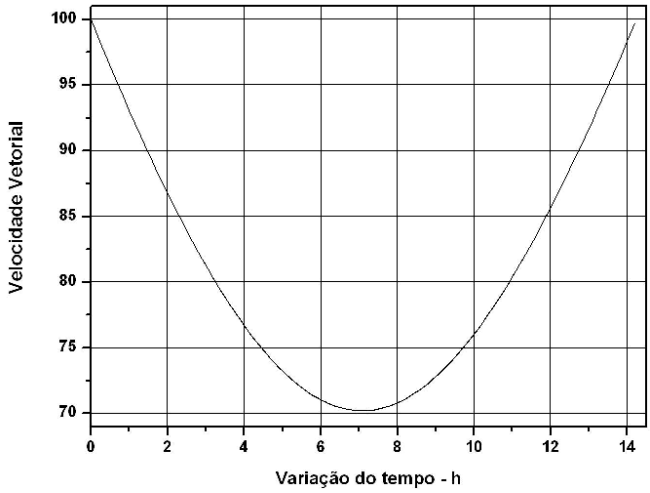

Figura 9. $\vec{V} \times h$.

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM COM θ VARIANDO

Nesta aplicação, pretende-se avaliar os alcances horizontal e vertical máximos para um caso no qual apenas haja variação do ângulo de disparo (θ). Para isso, serão utilizados as mesmas constantes da aplicação anterior, sendo que será adotado sempre $\Delta h = 0{,}1$. O gráfico a seguir, apresenta o deslocamento bidimensional sofrido pela bala de canhão para alguns valores de θ.

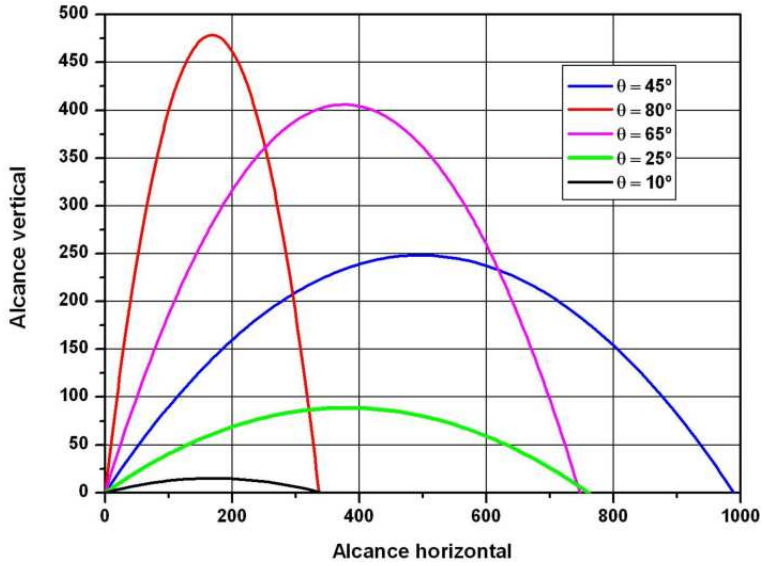

Figura 10. Alcance horizontal e vertical com diferentes valores de θ.

Nota-se que para $0º < \theta < 90º$, o maior alcance horizontal apresenta-se em $\theta = 45º$ e que o maior alcance vertical em $\theta = 80º$. E mais, quanto mais θ tende a 90º, maior será o alcance vertical. Um outro resultado interessante é que em $\theta = 65º$ e $\theta = 25º$ o alcance horizontal são aproximadamente iguais, ou seja, há uma certa simetria (veja que a discretização no tempo é grosseira, $\Delta h = 0{,}1$, é bem provável que quanto menor for Δh, mais próximos os alcances horizontais de $\theta = 65º$ e $\theta = 25º$ serão), com a ressalva, que ambos estão a 20º de $\theta = 45º$, o mesmo acontece com o par $\theta = 80º$ e $\theta = 10º$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar do auto custo computacional na implementação pelo Método de Runge-Kutta, principalmente o de ordem 4, devido ao número de avaliações de f, por passo, ser grande, este método é auto-iniciável e o comprimento do passo pode ser alterado com facilidade. Por fim, este método é um excelente ponto de partida para iniciação científica de alunos de graduação e até mesmo para problemas um pouco mais avançados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROSO, L. C. et. all. **Cálculo Numérico (com aplicações)**. 2ª edição. São Paulo: HARBRA, 1987.

BUTCHER, J. C.. The **Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations – Runge-Kutta and General Linear Methods**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1987.

CARNAHAN, B., LUTHER, H. A., WILKES, J. O. **Applied Numerical Methods**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1969.

GERALD C. F. , WHEATLEY, P. O. .**Applied Numerical Analysis**. Sixth Edition. Upper-Saddle River: Addison-Wesley, 1999.

FOX, R. W., MCDONALD, A. T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 5ª edição. São Paulo: LTC Editora, 2001.

MOURA, L. F. M., ISMAIL, K. A. R. **Métodos Numéricos em Mecânica dos Fluidos.** Notas de Aulas, FEM. Campinas: UNICAMP, 1994.